Geometria de l'espai

En l'espai afí trobem:

- **Punts**: $A(a_1,a_2,a_3)$.
- **Rectes**: Són varietats lineals que venen determinades per dos punts o bé un punt i un vector.

  Sigui r la recta determinada per $r \rightarrow \begin{cases} A(a_1,a_2,a_3) \\ v(v_1,v_2,v_3) \end{cases}$ aleshores les equacions que trobarem seran

  - **Vectorial**: $(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)$.
  - **Paramètrica**: $\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ x=a_2+\lambda v_2 \\ x=a_3+\lambda v_3 \end{cases}$.

  I treballant una mica amb aquesta equació trobem $\begin{cases} \lambda=\frac{x-a_1}{v_1} \\ \lambda=\frac{x-a_2}{v_2} \\ \lambda=\frac{x-a_3}{v_3} \end{cases}$ i sortiria l'equació:

  - **Contínua**: $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{x-a_2}{v_2}=\frac{x-a_3}{v_3}$.

- **Plans**. Són varietats lineals que venen determinades per tres punts o bé un punt i dos vectors.

  Sigui π el pla per $\pi \rightarrow \begin{cases} A(a_1,a_2,a_3) \\ v(v_1,v_2,v_3) \\ u(u_1,u_2,u_3) \end{cases}$ aleshores les equacions que sortiran seran:

  - **Vectorial**: $(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda\cdot(v_1,v_2,v_3)+\beta\cdot(u_1,u_2,u_3)$.
  - **Paramètrica**: $\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1+\beta\cdot u_1 \\ x=a_2+\lambda v_2+\beta\cdot u_2 \\ x=a_3+\lambda v_3+\beta\cdot u_3 \end{cases}$

  I treballant una mica amb aquesta equació trobaríem $\begin{cases} \lambda v_1+\beta\cdot u_1 = x-a_1 \\ \lambda v_2+\beta\cdot u_2 = x-a_2 \\ \lambda v_3+\beta\cdot u_3 = x-a_3 \end{cases}$ que és un sistema amb 3 equacions i 2 incògnites (λ,β) compatible determinat i aleshores:

$$\begin{bmatrix} v_1 & u_1 & x\text{-}a_1 \\ v_2 & u_2 & x\text{-}a_2 \\ v_3 & u_3 & x\text{-}a_3 \end{bmatrix} = 0$$

– **General o implicita**: $\begin{bmatrix} x\text{-}a_1 & u_1 & v_1 \\ x\text{-}a_2 & u_2 & v_2 \\ x\text{-}a_3 & u_3 & v_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$ Ax+By+Cz+D=0.

Observem que el vector (A,B,C) és perpendicular a les dues direccions del pla és a dir:

$\begin{bmatrix} x\text{-}a_1 & u_1 & v_1 \\ x\text{-}a_2 & u_2 & v_2 \\ x\text{-}a_3 & u_3 & v_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2) \cdot (x\text{-}a_1) - (u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3) \cdot (x\text{-}a_1) + (u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1) \cdot (x\text{-}a_3) = 0$, per tant el vector perpendicular serà: $(u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$ i d'aquesta manera:

$u \cdot u \wedge v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1) = u_1 \cdot u_2 \cdot v_3 - u_1 \cdot u_3 \cdot v_2 + u_2 \cdot u_3 \cdot v_1 - u_2 \cdot u_1 \cdot v_3 + u_3 \cdot u_1 \cdot v_2 - u_3 \cdot u_2 \cdot v_1 = 0$.

Anàlogament es faria per veure $v \cdot (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1) = 0$.

Donat un pla Ax+By+Cz+D=0 el vector (A,B,C) no és un vector del pla però si que és perpendicular als dos vectors del pla.

Observem, també, que

- Dues rectes són paral·leles si els seus vectors directors són depenents.
- Un pla i una recta són paral·les si el vector de la recta i el perpendicular del pla són perpendiculars.
- Dos plans són paral·lels si els seus vectors perpendiculars són depenents.
- Dues rectes són perpendiculars si els seus vecors directors són perpendiculars.
- Un pla i una recta són perpendiculars si el vector de la recta i el vector perpendicular del pla són depenents.
- Dos plan són perpendiculars si el vector perpendicular dels dos plans són perpendiculars.

Exemples de càlcul de rectes i plans.

Exemple 1. Troba la recta que passa pels punts A(1,3,0) i B(3,-2,4).

- Considerem $\begin{cases} \text{A(1,3,0)} \\ \vec{\text{AB}} = (2,-5,4) \end{cases}$ i aleshores les equacions que trobarem seran:
  - **Vectorial**: (x,y,z)=(1,3,0)+λ(2,-5,4).
  - **Paramètrica**: $\begin{cases} \text{x=1+2}\lambda \\ \text{y=3-5}\lambda \\ \text{z=4}\lambda \end{cases}$.
  - **Contínua**: $\frac{\text{x-1}}{2} = \frac{\text{y-3}}{-5} = \frac{\text{z}}{4}$.

Exemple 2. Troba el pla determinat pels punts A(1,0,2), B(1,3,1) i C(2,1,0):

- Considerem $\begin{cases} \text{A}(1,0,2) \\ \vec{\text{AB}}\text{=(0,3,1)} \\ \vec{\text{AC}}\text{=(1,1,-2)} \end{cases}$ i aleshores les equacions que sortiran seran:
  - **Vectorial**: (x,y,z)=(1,0,2)+λ $(0,3,1) + \beta$ (1,1,-2).
  - **Paramètrica**: $\begin{cases} \text{x=1+}\beta \\ \text{y=3}\lambda\text{+}\beta \\ \text{z=2+}\lambda - 2\beta \end{cases}$.
  - **General**: $\begin{bmatrix} \text{x-1} & 0 & 1 \\ \text{y} & 3 & 1 \\ \text{z-2} & 1 & -2 \end{bmatrix}$ =0→ -7x+y-3z+13=0.

Exemple 3. Troba un punt i dos vectors del pla 3x-4y+z=3.

- 3x-4y+z=3→ z=3-3x+4y i aleshores (x,y,z)= (x,y, 3-3x+4y)= (0,0,3)+ x(1,0,-3)+ y(0,1,4). Per tant el punt que trobarem serà (0,0,3) mentre que els dos vectors seran (1,0,-3) i (0,1,4).

  Exemple 4. Troba una recta paral·lela a la recta r: $\frac{\text{2x-3}}{5} = \frac{\text{6y-4}}{5} = \frac{\text{z-2}}{3}$ pel punt (3,-2,4).

- La recta buscada passarà pel punt (3,-2,5) i tindrà el vector director de r i per tant $\frac{\frac{2x-3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{6y-4}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{z-2}{3}$ per tant $\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{y-\frac{3}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{z-2}{3}$ i el seu vector serà ($\frac{5}{2}$, $\frac{5}{6}$, 3). Així, doncs, la recta que trobarem serà:

$$\frac{x-3}{\frac{5}{2}} = \frac{y+2}{\frac{5}{6}} = \frac{z-2}{3}$$

Exemple 5. Troba un plà paral·lel a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-1}{2}$ que conté la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$.

- El pla que busquem conté la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$ i per tant el seu punt (2,1,0) i el seu vector (3,4,5) i com que és paral·lel a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-1}{2}$ l'altre vector serà (2,5,2). Per tant el pla serà:

$$\begin{bmatrix} x-2 & 3 & 2 \\ y-1 & 4 & 5 \\ z & 5 & 2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -17x+4y+7z+30=0.$$

Exemple 6. Troba un pla paral·lel al pla 4x+y-z+5=0 que passi pel punt (3,1,2).

- Com que els dos plans han d'ésser paral·lels els dos vectors perpendiculars hauran d'ésser depenents i així:

  4x+y-z+D=0→ 4·3+1-2+D=0→ D=-11 i el pla que sortirà serà 4x+y-z-11=0.

Exemple 7. Troba la recta perpendicular al pla 3x+y-4z+5=0 pel punt (1,1,3).

- Com que la recta que cerquem és perpendicular al pla 3x+y-4z+5=0 el vector de la recta serà (3,4,-4) i així, doncs, la recta que tindrem serà $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

Exemple 8. Troba el pla perpendicular a la recta $\frac{2x-1}{3} = \frac{4y-1}{1} = \frac{z-3}{-4}$ pel punt (1,8,2).

- Considerem la recta $\frac{2x-1}{3} = \frac{4y-1}{1} = \frac{z-3}{-4}$ que en forma contínua serà $\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{z-3}{-4}$, per tant el vector del pla perpendicular serà ($\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, -4), d'aquesta manera el pla serà $\frac{3}{2}$x+$\frac{1}{4}$y-4z+d=0 i imposant que passi pel punt (1,8,2) tindrem: $\frac{3}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 8-4\cdot 2+d=0 \rightarrow d=\frac{9}{2}$. Per tant el pla buscat serà:

$$\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}y-4z+\frac{9}{2}=0$$