

Solucions examen 7

1.- Estudia i resol el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 5x + 5y + az = 5 \end{cases}$$

En efecte, Aquest sistema té per matriu associada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & a \end{pmatrix}$ i per matriu

ampliada $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & a & 5 \end{pmatrix}$

- La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A.

Aleshores $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & a \end{vmatrix} = (8a-20)-3(a-25)+5(-18)=5a-35=0 \rightarrow a=7.$

Si $a \neq 7$ com que $\det A \neq 0$ aleshores $\text{Rang} A = 3$ i per tant $\text{Rang} B = 3$, aleshores:

$$\begin{cases} \text{Rang} A = 3 \\ \text{Rang} B = 3 \\ n^\circ \text{ incògnites} = 3 \end{cases} \rightarrow \text{El sistema serà compatible determinat i les seves}$$

solucions seran:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & a \end{vmatrix}}{5a-35} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & a \end{vmatrix}}{5a-15} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{5a-15} = \frac{0}{5a-15} = 0.$$

Per altra banda si $a = 7$ aleshores el sistema sortirà

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 5x + 5y + 7z = 5 \end{cases}$$

En efecte, Aquest sistema té per matriu associada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ i per matriu

ampliada $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

- La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A. Observem que $\det A=0$ i, per tant,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 5 \text{ tindrem que } \text{rang} A = 2. \text{ Per altra banda } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0 \text{ i } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0 \text{ i d'aquesta manera el rang de B serà 2.}$$

Així, doncs, tindrem:

$$\begin{cases} \text{Rang} A = 2 \\ \text{Rang} B = 2 \\ \text{n}^\circ \text{ incògnites} = 3 \end{cases} \rightarrow \text{El sistema serà compatible indeterminat per } a=7.$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 - 5z \\ 3x + 4y = 2 - 2z \end{cases}$$

Les solucions, doncs seran:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 3 - 5z & 1 \\ 2 - 2z & 4 \end{bmatrix}}{5} = \frac{12 - 20z - 2 + 2z}{5} = \frac{-18z + 10}{5}$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 - 5z \\ 3 & 2 - 2z \end{bmatrix}}{5} = \frac{4 - 4z - 9 + 15z}{5} = \frac{11z - 5}{5}$$

2.- Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula

a) $A \bullet B - B \bullet A$

b) A^2

En efecte,

$$\text{a) } A \bullet B - B \bullet A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 15 & 15 \\ -4 & 22 & 16 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -5 & 9 \\ 5 & 3 & 11 \\ 10 & 6 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 20 & 6 \\ -9 & 19 & 5 \\ -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 20 \\ 14 & 4 & 24 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3.- \text{ Donada la matriu } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Troba B^{-1}

b) Resol el sistema

$$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

En efecte,

$$i) \det B = -2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = -17$$

$$ii) {}^t B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$iii) \text{adj}({}^t B) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -5 & -10 & 2 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{17} & \frac{5}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{10}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{-4}{17} & \frac{-8}{17} & \frac{5}{17} \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalment les solucions del sistema seran, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{17} & \frac{5}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{10}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{-4}{17} & \frac{-8}{17} & \frac{5}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4

4.- Calcula $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -(5 +$

3·10)=-35

**pdfMachine - is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Get yours now!**

"Thank you very much! I can use Acrobat Distiller or the Acrobat PDFWriter but I consider your product a lot easier to use and much preferable to Adobe's" A.Sarras - USA