

Solucions examen 7

1.- Tres nombres sumen 17; la suma dels dos primers una unitat menor que el tercer i el tercer és tres vegades el primer. Quins són aquests tres nombres?

Solució.

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ x + y + 1 = z \\ z = 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 17 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 3, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 17 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 5, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 9.$$

2.- *Estudia el sistema*

$$\begin{cases} x + 8y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - z = 1 \\ 3x + 12y + z = 10 \end{cases}$$

Aquest sistema té per matriu associada $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 12 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

La primera cosa que farem és estudiar el rang d'aquestes dues matrius:

Observem que $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0$ i per tant $\text{Rang}A \leq 3$ i com que $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12$

el rang d'A serà 2.

Per altra banda com que $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 12 & 10 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0$,

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & -1 & 1 \\ 12 & 1 & 10 \end{bmatrix} = 0.$$

- tindrem que rangB també serà 2. Aleshores:

$$\begin{cases} \text{RangA}=2 \\ \text{RangB}=2 \\ n^{\circ} \text{ incògnites}=3 \end{cases} \rightarrow \text{sistema compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat.}$$

El grau de llibertat serà en aquest cas la incògnita que no intervé en el rang és a dir z . I aleshores l'equació que sobrarà serà $3x + 12y + z = 10$ ja que tampoc intervé en el rang. Així, doncs, el sistema d'equacions que trobarem serà,

$$\begin{cases} x + 8y = 9 - 2z \\ 2x + 4y = 1 + z \end{cases}$$

Pel mètode de Cramer les solucions d'aquest sistema seran $x = \frac{\begin{vmatrix} 9 - 2z & 1 \\ 1 + z & 2 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{17 - 5z}{-12}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 - 2z \\ 2 & 1 + z \end{vmatrix}}{-12} = \frac{5z - 17}{-12}$.

3.- Un constructor compra tres parcel·les i paga cada una respectivament a 1500, 1800 i 2000 el metre quadrat. Entre les tres parcel·les fan 1870 metres quadrats, el preu total de l'operació és de 3360000 Euros i el preu de la tercera és la tres quartes parts de les altres dues juntes. Quina és la superfície de cada parcel·la?

$$\begin{cases} 1500x + 1800y + 2000z = 3360000 \\ x + y + z = 1870 \\ 2000z = \frac{3}{4}(1500x + 1800y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1500x + 1800y + 2000z = 3360000 \\ x + y + z = 1870 \\ 4500x + 5400y - 8000z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3360000 & 1800 & 2000 \\ 1870 & 1 & 1 \\ 0 & 5400 & -8000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1500 & 1800 & 2000 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4500 & 5400 & -8000 \end{vmatrix}} = 500, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1500 & 3360000 & 2000 \\ 1 & 1870 & 1 \\ 4500 & 0 & -8000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1500 & 1800 & 2000 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4500 & 5400 & -8000 \end{vmatrix}} = 650,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1500 & 1800 & 3360000 \\ 1 & 1 & 1870 \\ 4500 & 5400 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1500 & 1800 & 2000 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4500 & 5400 & -8000 \end{vmatrix}} = 720.$$