

## Matrius i sistemes d'equacions

**Definició.** Una matriu amb  $m$  columnes i  $n$  fil·les ( $m \times n$ ) és una expressió de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on  $a_{ij} \in R$ .

**Exemples:**

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$  matriu  $2 \times 2$ .
- $B = \begin{pmatrix} 4 & 21 & 10 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$  matriu  $3 \times 2$ .
- $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  matriu  $2 \times 3$ .

Trobem diversos tipus de matrius, així per exemple trobem:

- **Matrius quadrades.** Són aquelles matrius que tenen el mateix nombre de fil·les que de columnes:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -11 & 9 \end{pmatrix} \text{ matriu quadrada d'ordre 2.}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 12 & -10 & 7 \end{pmatrix} \text{ matriu quadrada d'ordre 3.}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ matriu quadrada d'ordre 4.}$$

- **Matrius triangulars superior.** Són aquelles matrius tals que  $a_{ij} = 0$  si  $i > j$ .

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius triangulars inferior.** Són aquelles matrius tals que  $a_{ij} = 0$  si  $j > i$ .

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 12 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius diagonals.** Són aquelles matrius quadrades tals que  $a_{ij} = 0$  si  $j \neq i$ .

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius simètriques.** Són aquelles matrius quadrades tals que  $a_{ij} = a_{ji}$ .

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 7 \\ 9 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius antisimètriques.** Són aquelles matrius quadrades tals que  $a_{ij} = -a_{ji}$ .

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -8 & 4 & 7 \\ -9 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius nul·les.** Són aquelles matrius tals que  $a_{ij} = 0$ .
- **Matrius identitats.** Són aquelles matrius quadrades tals que  $a_{ij} = 0$  si  $j \neq i$  mentre que  $a_{ii} = 1$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu es nota per Id.

- Donada una matriu quadrada A definim  ${}^tA$  com aquell matriu que resulta de canviar les files per les columnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

## Operacions amb matrius

Donades dues matrius  $n \times m$  de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

podem definir les següents operacions:

- **Suma de matrius:**

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- **Diferència de matrius:**

$$\begin{aligned}
 A - B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- **Producte d'una matriu per un escalar:**

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aquestes tres operacions verifiquent les següents propietats per qualsevols A,B,C matrius i k i m nombre reals:

- $A+B=B+A$  (commutativa).
- $A+(B+C)=(A+B)+C$  (associativa).
- $A+(0)=(0)+A=A$  (element neutre de la suma).
- $A+(-A)=(-A)+A=(0)$  (element oposat de la suma).

- $k \cdot (A+B) = k \cdot A + k \cdot B$ .
- $(k+m) \cdot A = k \cdot A + m \cdot A$ .
- $(k \cdot m) \cdot A = k \cdot (m \cdot A)$ .
- $1 \cdot A = A$ .

**Observació:** Amb aquestes propietats es diu que el conjunt de les matrius  $n \times m$  amb les operacions suma i producte per escalar és un espai vectorial sobre els nombres reals.

- **Producte de matrius:** Siguin dues matrius

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

amb  $A$  que té el mateix nombre de columnes que  $B$  de fil·les. Aleshores definim

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

essent  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$ .

**Exemples:**

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \\ 2 \cdot 5 + 4 \cdot 6 & 2 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{pmatrix}$ .

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 4 \cdot 11 + 7 \cdot 12 & 1 \cdot 13 + 4 \cdot 14 + 7 \cdot 15 & 1 \cdot 16 + 4 \cdot 17 + 7 \cdot 18 \\ 2 \cdot 10 + 5 \cdot 11 + 8 \cdot 12 & 2 \cdot 13 + 5 \cdot 14 + 8 \cdot 15 & 2 \cdot 16 + 5 \cdot 17 + 8 \cdot 18 \\ 3 \cdot 10 + 6 \cdot 11 + 9 \cdot 12 & 3 \cdot 13 + 6 \cdot 14 + 9 \cdot 15 & 3 \cdot 16 + 6 \cdot 17 + 9 \cdot 18 \end{pmatrix}$$

Les propietats més importants del producte per matrius A, B i C compatibles amb el producte són:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  (propietat associativa).
- $A \cdot \text{Id} = \text{Id} \cdot A = A$  (neutre del producte).
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  (propietat distributiva).
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$  (propietat distributiva).

Observem amb un exemple, però que la propietat commutativa no existeix:

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Observem també que no tenim en principi tampoc l'existència d'element invers respecte del producte és a dir l'existència d'una matriu B tal que  $A \cdot B = B \cdot A = \text{Id}$ . De fet per matrius quadrades hi haurà cassos en que tindrem matriu inversa i cassos en que no.

**Exemple:** Sigui A la matriu  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Calcula la matriu  $A^{-1}$ .

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3a+2b & 3c+2d \\ 5a & 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3a+2b=1 \\ 5a=0 \\ 3c+2d=0 \\ 5c=0 \end{cases} \rightarrow \text{I les solucions per}$$

aquest sistema són  $a=0$ ,  $b=\frac{1}{2}$ ,  $c=\frac{1}{3}$  i  $d=\frac{-3}{10}$ .

Per tant  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{10} \end{pmatrix}$ .

## Determinants d'una matriu quadrada

1. Donada una matriu quadrada d'ordre 2,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  definim el seu de-

terminant com  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ .

2. Donada una matriu quadrada d'ordre 3,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  definim el

seu determinant com

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

3. Donada una matriu quadrada d'ordre 4,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$  definim

el seu determinant de forma anàloga al cas anterior és a dir

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

4. Donada una matriu quadrada d'ordre  $n$  definim el seu determinant fixada una columna com  $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot A_{ji} \cdot (-1)^{j+i}$  essent  $A_{ji}$  el determinant que surt d'eliminar la fil·la  $i$  i la columna  $ji$  respectivament.

### Exemples:

- $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 8 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 11.$
- $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = -26 - 23 + 66 = 17.$
- $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 39 - 90 - 12 = -63.$
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-18) - 1 \cdot (-20) = -34.$

### Propietats dels determinants

1. Si tots els elements d'una fila o una columna es descomponen en dos sumands, el seu determinant és la suma de dos determinants que tenen en aquesta filera o columna el primer i el segon sumands, respectivament, i a les altres tenen els mateixos elements que el determinant inicial.

- $\begin{bmatrix} 3+5 & 5 \\ 2+4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3+6 & 5-6 & 1+8 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & -6 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$

2. Si es multipliquen tots els elements d'una filera o una columna d'una matriu quadrada per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.

$$\bullet \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 & 5 \\ 2 \cdot 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 \cdot 9 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 8 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. Donades dues matrius A i B quadrades nxn aleshores  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$  mentre que  $\det({}^t A) = \det(A)$ .
4. Si intercanviem dues fileres o dues columnes d'una matriu quadrada el determinant d'aquesta última matriu és el mateix que el de la primera però canviat de signe.

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Si una matriu quadrada té una filera o una columna amb tots els elements nuls, el seu determinant és 0.

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

6. Si una filera o una columna d'una matriu quadrada és una combinació lineal de la resta de fileres o columnes aleshores el seu determinant és 0.

$$\bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & 15 \end{bmatrix} = 0 \text{ ja que } F_3 = 3 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2.$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 3 & 11 & 9 \end{bmatrix} = 0 \text{ ja que } F_3 = F_1 + F_2.$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 14 \end{bmatrix} = 0 \text{ ja que } C_3 = 2 \cdot C_1 + C_2.$$

7. Si una filera o una columna d'una matriu quadrada se'n suma una altra de paral·lela multiplicada per un nombre el seu determinant no varia.

**pdfMachine**

**A pdf writer that produces quality PDF files with ease!**

Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.

Get yours now!

cular la seva inversa.

- $\det(A)=1\cdot 7+2\cdot 2=11\neq 0.$

- Trasposem la matriu trasposta de  $A \rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

- Calculem l'anomenada matriu dels adjunts de la trasposta  $\rightarrow$

$$\text{adj}({}^tA) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -30 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

- Finalment  $A^{-1} = \frac{\text{adj}({}^tA)}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & -30 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}}{11} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{-30}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{7}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$

- Comprovem-ho :  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{-30}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{7}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### Exemple 2:

Sigui  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  anem a calcular la seva inversa.

- $\det(A)=3\cdot 0-1\cdot 4+2\cdot 4=4\neq 0.$

- Trasposem la matriu trasposta de  $A \rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculem l'anomenada matriu dels adjunts de la trasposta  $\rightarrow$

$$\text{adj}({}^tA) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ Finalment } A^{-1} = \frac{\text{adj}({}^tA)}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \text{ Comprovem-ho: } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exemple 3:

Signi  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  anem a calcular la seva inversa.

$$1. \det(A) = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 0.$$

Per tant aquesta matriu no té inversa.

En resum per tal de calcular la inversa d'una matriu quadrada  $A$  cal realitzar els següents passos:

1. Calculem el determinant de la matriu  $A$ , si aquest determinant és 0 aleshores la matriu inversa no existirà i per tant no podrem continuar.
2. Fem la trasposta d'  $A \rightarrow {}^tA$ .
3. Fem la matriu adjunta d'  $A \rightarrow \text{adj}({}^tA)$ .
4. Finalment  $A^{-1} = \frac{\text{adj}({}^tA)}{\det A}$ .

## Exercicis resolts

**Exercici 1.** Siguin  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  troba i calcula  $2A+4B$ ,  $3A-2B$ ,  $A \cdot B$ ,  $B \cdot A$ ,  $A^2$ ,  $A^{-1}$ .

$$\bullet 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & -6 \\ 0 & 22 & 14 \\ 18 & 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -5 & 9 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -4 \\ 13 & 23 & 18 \\ 46 & 30 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & -3 \\ 5 & 20 & 16 \\ 20 & 32 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -4 & 29 & 29 \\ 24 & 22 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \text{Matriu inversa d'A: } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 2 \neq 0 \rightarrow$$

$$A^{\text{adj}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -4 & 4 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 24 \\ -6 & 16 & -2 \\ 8 & -7 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(A^{\text{adj}})^t = \begin{pmatrix} 14 & -6 & 8 \\ -6 & 16 & -7 \\ 24 & -2 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -3 & 8 & -7/2 \\ 12 & -1 & 17/2 \end{pmatrix}.$$

**Exercici 2.** Sigui  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$  troba  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^{228}$ .

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Per tant com que } A^{228} = A^{76 \cdot 3 + 0} = (A^3)^{76} = (\text{Id})^{76} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercici 3.** Siguin  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  troba els valors de  $a$ ,  $b$  i  $c$  per tal que  $A \cdot B = B \cdot A$ .

$$\bullet A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b-4c \\ 2a & 2b-3c \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2b & -4a-3b \\ 2c & -3c \end{pmatrix}$$

$$\text{Aleshores } \begin{cases} 3a+2b=3a \\ 3b-4c=-4a-3b \\ 2a=2c \\ 2b-3c=-3c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=c \\ a=c \\ b=0 \end{cases}.$$

**Exercici 4.** Donada la matriu  $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$

1. Troba el valor de  $p$  pel qual  $A$  té inversa.

2. Pel valor  $P=2$  troba la matriu inversa.

3. Resol el sistema  $\begin{cases} px=1 \\ x+py+z=3 \\ x+(p-1)z=4 \end{cases}$  per  $p=2$  seguint el mètode de la matriu inversa.

- Per tal que A tingui inversa cal que el seu determinant sigui diferent de 0,

$$\text{per tant tindrem } \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow p^2 \cdot (p-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} p=0 \\ p=1 \end{cases} .$$

Per tant existirà inversa sempre que  $p \neq 0, 1$ .

$$\text{Per } p=2 \text{ la matriu que haurem de fer la inversa serà } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\det A = 4 \rightarrow$

$$A^{\text{adj}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(A^{\text{adj}})^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\text{El sistema per tant que tindrem serà } \begin{cases} 2x=1 \\ x+2y+z=3 \\ x+z=4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

**Exercici 4.** Calcula  $\begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{bmatrix}$ .

$$\bullet \begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{bmatrix} \stackrel{F_2-F_1}{F_3-F_1} \begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 0 .$$

## Exercicis per resoldre

1. Considerem les matrius  $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2b+1 & 1 \\ 2 & a+b \end{pmatrix}$  troba els valors d'a i b sabent que  $A=B$ .

2. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

- $A+2B-5C$ .
- $3 \cdot A+4^t C$ .
- $A \cdot B$ .
- $B \cdot A$ .
- $A \cdot C$ .
- $A \cdot B+A \cdot C$ .
- $A \cdot (B+C)$ .
- ${}^t A \cdot {}^t B$
- ${}^t (B \cdot A)$ .

3. Troba els valors d'a,b,c per tal que les matrius següents siguin simètriques:

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ a & 7 & c \\ b & 8 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}.$$

4. Siguin  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Resol l'equació  $3 \cdot (X-A) = 2 \cdot (X+B)$ .

5. Calcula  $A \cdot B$ ,  ${}^t A \cdot {}^t B$  essent  $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ .

6. Calcula el determinant de les matrius A, B, C de l'exercici 2.

7. Donada la matriu  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$  calcula  $A^2$ ,  $A^3$  i  $A^{58}$ ,  $A^{157}$ .

8. Calcula el valor dels següents determinants

- $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ .

- $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 9 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

9. Resol la següent equació  $\begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ -a & a-1 & 0 \\ -1 & -2 & a+1 \end{bmatrix} = 0$ .

10. Calcula la inversa de les següents matrius

- $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$