sistemes d'equacions amb paràmetres

Exercici 1. Estudia el sistema d'equacions

$$\begin{gathered}2x\text{-}5y\text{-}z=3\\ x\text{-}3y\text{-}z=2\\ 2x\text{-}y+az=\text{-}2\end{gathered}$$

- Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix}2 & -5 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ 2 & -1 & \text{a}\end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix}2 & -5 & -1 & 3\\ 1 & -3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & \text{a} & -2\end{pmatrix}$

  La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A.

  Aleshores $\begin{bmatrix}2 & -5 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ 2 & -1 & \text{a}\end{bmatrix}$ = -a+3=0→ a=3.

  Si **a≠3** com que detA≠0 aleshores RangA=3 i per tant RangB=3, aleshores:

  $\left\{\begin{array}{c}\text{RangA=3}\\ \text{RangB=3}\\ \text{n}^o\text{ incògnites=3}\end{array}\right.$ → El sistema serà compatible determinat i les seves solucions seran:

  x=$\dfrac{\begin{bmatrix}3 & -5 & -1\\ 2 & -3 & -1\\ -2 & -1 & \text{a}\end{bmatrix}}{-a+3}=\dfrac{\text{a-5}}{\text{-a+3}}$, y=$\dfrac{\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & a\end{bmatrix}}{-a+3}=\dfrac{\text{a-4}}{\text{-a+3}}$, y=$\dfrac{\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{bmatrix}}{-a+3}=\dfrac{1}{\text{-a+3}}$.

  Per altra banda si **a=3** aleshores el sistema sortirà

$$\begin{gathered}2x\text{-}5y\text{-}z=3\\ x\text{-}3y\text{-}z=2\\ 2x\text{-}y+3z=\text{-}2\end{gathered}$$

  Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix}2 & -5 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B= $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ i com que detA=0, $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ =-1 tindrem que rangA=2. Per altra banda $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ i d'aquesta manera el rang de B serà 3. Així, doncs, tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right. \rightarrow \text{El sistema serà incompatible per a=3.}$$

Exercici 2. Estudia el sistema d'equacions

$$\begin{array}{c} 2x+y=3 \\ 3x+4y=5 \\ 2x+ky=2 \end{array}$$

- Aquest sistema té per matriu associada A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$

  La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'B.

  Aleshores $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & k & 2 \end{bmatrix}$ = -k-32=0→ k=-32.

  Si **k**$\neq$ **−32** com que detB≠0 aleshores RangB=3 i per tant :

  $$\left\{ \begin{array}{r} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right. \rightarrow \text{El sistema serà incompatible}$$

  Per altra banda si **a=-32** aleshores el sistema sortirà

  $$\begin{array}{c} 2x\text{-}5y\text{-}z=3 \\ x\text{-}3y\text{-}z=2 \\ 2x\text{-}y+3z=\text{-}2 \end{array}$$

Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ i com que detA=0, $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ =-1 tindrem que rangA=2. Per altra banda $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ i d'aquesta manera el rang de B serà 3. Així, doncs, tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right. \rightarrow \text{El sistema serà incompatible per a=3.}$$

Exercici 3. Estudia el sistema d'equacions

$$\begin{array}{c} \text{ax-y+2z=2-a} \\ \text{2x+3y-z=-3a} \\ \text{x+2y-z=-2a} \end{array}$$

- Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 2-a \\ 2 & 3 & -1 & -3a \\ 1 & 2 & -1 & -2a \end{pmatrix}$

  La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A.

  Aleshores $\begin{bmatrix} a & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ = -a+1=0$\rightarrow$ a=1.

  Si **a≠1** com que detA≠0 aleshores RangA=3 i per tant RangB=3, aleshores:

  $$\left\{ \begin{array}{r} \text{RangA=3} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right. \rightarrow \text{El sistema serà compatible determinat i les seves}$$
  solucions seran:

x= $\frac{\begin{bmatrix} 2-a & -1 & 2 \\ -3a & 3 & -1 \\ -2a & 2 & -1 \end{bmatrix}}{-a+3} = \frac{2a-2}{-a+1}$ = -2, y= $\frac{\begin{bmatrix} a & 2-a & 2 \\ 2 & -3a & -1 \\ 1 & -2a & -1 \end{bmatrix}}{-a+3} = \frac{a^2-5a+2}{-a+1}$, y= $\frac{\begin{bmatrix} a & -1 & 2-a \\ 2 & 3 & -3a \\ 1 & 2 & -2a \end{bmatrix}}{-a+3} = \frac{-2a+2}{-a+1} = 2.$

Per altra banda si **a=1** aleshores el sistema sortirà

$$\begin{gathered} x-y+2z=1 \\ 2x+3y-z=-3 \\ x+2y-z=-2 \end{gathered}$$

Aquest sistema té per matriu associada A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ i com que detA=0, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ =1 tindrem que rangA=2. Per altra banda $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = 0.$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = 0,$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = 0.$ Per tant RangB=2.

Així doncs tindrem

$\left\{ \begin{array}{c} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=2} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right.$ $\rightarrow$ El sistema serà compatible indeterminat amb un grau de llibertat per a=1. Per resoldre aquest sistema farem servir les equacions que intervenen en el rang i com grau de llibertat la incògnita que no intervé en el rang. El sistema, doncs, que tindrem serà:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+3y=-3+z \\ x + 2y=-2+z \end{array} \right.$$

Pel mètode de Cramer les solucions d'aquest sistema seran

x= $\frac{\begin{bmatrix} -3+z & 3 \\ -2+z & 2 \end{bmatrix}}{1} = \frac{-z}{1}$ = z, y= $\frac{\begin{bmatrix} 3 & -3+z \\ 2 & -2+z \end{bmatrix}}{1} = \frac{z-1}{1}.$

I per tant l'equació tindrà per solucions: (x,y,z)=(−z, z-1, z). Solucions particulars d'aquest sistema seran:

- z=0→ (0, −1, 0).
- z=1→ (−1, 0, 1).

Exercici 4. Estudia el sistema d'equacions

$$\begin{gathered} x+y+mz=1 \\ x-y+2z=0 \\ 2x-y-z=m \end{gathered}$$

- Aquest sistema té per matriu associada $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & m \end{pmatrix}$

  La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A.

  Aleshores $\begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = m+8=0 \rightarrow m=-8.$

  Si **m≠-8** com que detA≠0 aleshores RangA=3 i per tant RangB=3, aleshores:

  $\left\{ \begin{array}{c} \text{RangA=3} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right.$ → El sistema serà compatible determinat i les seves solucions seran:

  $x=\dfrac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & -1 & 2 \\ m & -1 & -1 \end{bmatrix}}{m+8} = \frac{3+2m+m^2}{m+8}$, $y=\dfrac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & m & -1 \end{bmatrix}}{m+8} = \frac{-2m+5+m^2}{m+8}$,

  $z=\dfrac{\begin{bmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & m \end{bmatrix}}{m+8} = \frac{2m+3+m^2}{m+8}$.

Si **m=-8** aleshores el sistema que tindrem serà:

$$\begin{array}{c} x+y-8z=1 \\ x-y+2z=0 \\ 2x-y-z=-8 \end{array}$$

aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ i com que detA=0, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$=-3 tindrem que rangA=2. Per altra banda $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ = -45≠0 i d'aquesta manera el rang de B serà 3. Així, doncs, tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right. \rightarrow \text{El sistema serà incompatible per m=-8.}$$