Sistemes d'equacions lineals

Un sistema d'equacions lineals amb m equacions i n incògnites és una expressió algèbrica de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o equivalentment en termes matricials:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Així tenim els elements a_{ij} s'anomenen coeficients del sistema, x_i s'anomenen incògnites mentre que els b_i reben el nom de termes independents.

Exemple:

- $\begin{cases} 2x+3y+2z=1 \\ 5x-3y-5z=2 \\ x+y+3z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3y+2z \\ 5x-3y-5z \\ x+y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Les qüestions què ens formulem en aquest apartat són:

1. Quant un sistema lineal tindrà solució?
2. Quantes solucions tindrà?
3. Com es troben aquestes solucions?

Definició. Un sistema d'equacions lineals es diu que és **compatible determinat** quan té una única solució per cada incògnita.

Definició. Un sistema d'equacions lineals es diu que és **compatible indeterminat** amb k graus de llibertat quan hi ha un seguit d'incògnites que es poden posar en funció de les altres k.

Definició. Un sistema d'equacions lineals es diu que és **incompatible** quan no té mai solució.

Teorema de Rouché. *Considerem el sistema d'equacions lineal*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Siguin $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ *i* $B=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *aleshores, tindrem,*

1. *Si RangA=RangB=n el sistema serà compatible determinat.*
2. *Si RangA=RangB=k<n el sistema serà compatible indeterminat amb n-k graus de llibertat.*
3. *Si RangA≠RangB el sistema serà incompatible.*

Observació. Les matrius A i B reben el nom de matriu associada al sistema i matriu ampliada respectivament.

Sistemes compatibles determinats

- $\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=9 \\ x+2y+3z=11 \\ x+y+z=6 \end{array}\right.$

  Aquest sistema té per matriu associada $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

La primera cosa que farem és estudiar el rang d'aquestes dues matrius:

Observem que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$= -1≠0 i per tant RangA=3 i com que podem agafar el mateix determinant per B tindrem RangB=3. Així doncs

$$\left\{\begin{array}{c} \text{RangA=3} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array}\right. \quad \rightarrow \text{sistema compatible determinat i tindrem una solució}$$

per x, una solució per y i una única solució per z.

Com podem, ara, trobar les solucions?

Tenim dos mètodes per tal de trobar les solucions d'aquest sistema d'equacions:

- **Mètode de la matriu inversa.**

  En aquest cas calculem la matriu inversa de la matriu associada al sistema i la multipliquem pel vector de termes independents:

  $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

  $$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

- **Mètode de Cramer.**

  En aquest cas per trobar cada incògnita cal calcular el determinant que consisteix en substituir els coeficients de la incògnita per la de termes independents i dividir-lo pel determinant de la matriu associada.

  $$x= \frac{\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{-1} = 3,\ y= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 11 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{-1} = 1,\ y= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}}{-1} = 2.$$

- $$\left\{\begin{array}{c} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \\ 4x+5y=14 \end{array}\right.$$

Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada

B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 14 \end{pmatrix}$.

La primera cosa que farem és estudiar el rang d'aquestes dues matrius:

Observem que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 14 \end{bmatrix} = 0$ i per tant RangB$\leq$2 i com que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$

3 tindrem RangA= RangB =3. Així doncs

$\left\{ \begin{array}{r} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=2} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=2} \end{array} \right. \rightarrow$ sistema compatible determinat i tindrem una solució per x, una solució per y.

Com podem, ara, trobar les solucions?

Per tal de trobar les solucions com que tenim dues incògnites ens sobrarà una equació que serà aquella que no intervé en el rang, és a dir eliminarem l'equació 4x+5y=14. Per tant haurem de resoldre el sistema d'equacions:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \end{array} \right.$$

Tenim tres mètodes per tal de trobar les solucions d'aquest sistema d'equacions:

- **Mètode de la matriu inversa.**

  En aquest cas calculem la matriu inversa de la matriu associada al sistema i la multipliquem pel vector de termes independents:

  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- **Mètode de Cramer.**

  En aquest cas per trobar cada incògnita cal calcular el determinant que consisteix en substituir els coeficients de la incògnita per la de termes independents i dividir-lo pel determinant de la matriu associada.

  x= $\frac{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}}{-3} = -1$, y= $\frac{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}{-3} = -2$.

Sistemes compatibles indeterminats.

- $\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=9 \\ x+2y+3z=11 \\ 3x+3y+4z=20 \end{array}\right.$ Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

  i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 3 & 4 & 20 \end{pmatrix}$.

  La primera cosa que farem és estudiar el rang d'aquestes dues matrius:

  Observem que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 0$ i per tant RangA$\leq$3 i com que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$=-3

  el rang d'A serà 2.

  Per altra banda com que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 11 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix}$=0, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & 20 \end{bmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & 20 \end{bmatrix} =$ 0.

  tindrem que rangB també serà 2. Aleshores:

  $\left\{\begin{array}{c} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=2} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array}\right.$ $\rightarrow$ sistema compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat. El grau de llibertat serà en aquest cas la incògnita que no intervé en el rang és a dir z. I aleshores l'equació que sobrarà serà 3x+3y+4z=20 ja que tampoc intervé en el rang. Així, doncs, el sistema d'equacions que trobarem serà,

  $$\left\{\begin{array}{c} 2x + y = 9 - z \\ x + 2y = 11 - 3z \end{array}\right.$$

  Pel mètode de Cramer les solucions d'aquest sistema seran x=$\frac{\begin{bmatrix} 9-z & 1 \\ 11-3z & 2 \end{bmatrix}}{-3} = \frac{z+7}{-3}$, y=$\frac{\begin{bmatrix} 2 & 9-z \\ 1 & 11-3z \end{bmatrix}}{-3} = \frac{-5z+13}{-3}$.

  I per tant l'equació tindrà per solucions: (x,y,z)=($\frac{z+7}{-3}$, $\frac{-5z+13}{-3}$, z). Solucions particulars d'aquest sistema seran,

  - z=0$\rightarrow$ ($\frac{7}{-3}$, $\frac{13}{-3}$, 0).
  - z=1$\rightarrow$ ($\frac{8}{-3}$, $\frac{8}{-3}$, 1).

Sistemes incompatibles

- $\begin{cases} 2x+y+z=9 \\ x+2y+3z=11 \\ 3x+3y+4z=15 \end{cases}$ Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

  i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$.

  La primera cosa que farem és estudiar el rang d'aquestes dues matrius:

  Observem que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 0$ i per tant RangA$\leq$3 i com que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$=-3

  el rang d'A serà 2.

  Per altra banda com que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 11 \\ 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$ = -15$\neq$0 el rangB=3. Per tant

  $\begin{cases} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=3} \end{cases}$ $\rightarrow$ I aquest sistema és incompatible.