Rang d'una matriu.

Definició. Donada una matriu A nxm anomenarem **menor d'ordre k** a qualsevol submatriu quadrada kxk de A.

Exemple: Donada una matriu A= $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 7 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ aleshores

- Menors d'ordre 2: $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$
- Menors d'ordre 3: $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$
- Menors d'ordre 4: $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 4 & 9 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ 7 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, ..$

Definició. Donada una matriu A nxm anomenarem rang d'aquesta matriu a l'odre del menor més gran tal que el seu determinant és diferent de 0.

Exemples:

- A= $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ en aquest cas el rang d'aquesta matriu pot ésser 1,2 o 3. Comencem mirant el determinant del menor 3x3 que en aquest cas serà:

  $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$. Per tant **rangA=3.**

- A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en aquest cas el rang d'aquesta matriu pot ésser 1,2 o 3. Comencem seleccionant tots els menors 3x3 que seran en aquest cas

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -4 + 1 = -3$. Per tant el **rangA=3**.

- A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ en aquest cas el rang d'aquesta matriu pot ésser 1,2 o 3.

  Comencem seleccionant tots els menors 3x3 que seran en aquest cas

  $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

  aleshores:

  $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0.$$

  Per tant el rang d'aquesta matriu no pot ser 3 ja que tots els determinants 3x3 són 0, vegem ara si val dos seleccionant un menor 2x2 que el seu determinant és diferent de 0, per exemple:

  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 11 \neq 0.$

  Per tant **RangA=2**.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ en aquest cas el rang d'aquesta matriu pot ésser 1,2 o 3.

  Comencem seleccionant tots els menors 3x3

  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} -3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + (-5) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} =$ 1·9-3·(5)-5·(2)=0.

  Per tant **RangA=3**.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 10 & 1 \end{pmatrix}$ en aquest cas el rang d'aquesta matriu pot ésser 1,2 o 3.

  Comencem seleccionant tots els menors 3x3:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (2) + 4 \cdot (2) = 0.$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (2) + 4 \cdot (2) = 0.$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-3) - 3 \cdot (3) + 4 \cdot (3) =.0$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) - 4 \cdot (3) + 6 \cdot (3) =.0$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2.$ Per tant **RangA=2.**