Matrius i sistemes d'equacions

Definició. Una matriu amb m columnes i n fil·les (mxn) és una expressió de la forma

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on $a_{ij} \in R$.

Exemples:

- A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ matriu 2x2.
- B=$\begin{pmatrix} 4 & 21 & 10 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ matriu 3x2.
- C=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matriu 2x3.

Trobem diversos tipus de matrius, així per exemple trobem:

- **Matrius quadrades.** Són aquelles matrius que tenen el mateix nombre de fil·les que de columnes:
  $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$ matriu quadrada d'ordre 2.
  $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 12 & -10 & 7 \end{pmatrix}$ matriu quadrada d'ordre 3.
  $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ matriu quadrada d'ordre 4.
- **Matrius triangulars superior**. Són aquelles matrius tals que $a_{ij} = 0$ si i>j.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius triangulars inferior**. Són aquelles matrius tals que $a_{ij} = 0$ si j>i.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 12 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius diagonals**. Són aquelles matrius quadrades tals que $a_{ij} = 0$ si $j \neq i$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius simètriques**. Són aquelles matrius quadrades tals que $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 7 \\ 9 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius antisimètriques**. Són aquelles matrius quadrades tals que $a_{ij} = -a_{ji}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -8 & 4 & 7 \\ -9 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrius nul·les**. Són aquelles matrius tals que $\mathrm{a_{ij}} = 0$.
- **Matrius identitats**. Són aquelles matrius quadrades tals que $\mathrm{a_{ij}} = 0$ si j$\neq$i mentre que $\mathrm{a_{ii}} = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu es nota per Id.

- Donada una matriu quadrada A definim ^{t}A com aquell matriu que resulta de canviar les files per les columnes.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} & \dots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} & \dots & \mathrm{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a_{n1}} & \mathrm{a_{n2}} & \dots & \mathrm{a_{nn}} \end{pmatrix} \rightarrow {}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{21}} & \dots & \mathrm{a}_{n1} \\ \mathrm{a_{12}} & \mathrm{a_{22}} & \dots & \mathrm{a_{n2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a_{1n}} & \mathrm{a_{2n}} & \dots & \mathrm{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Operacions amb matrius

Donades dues matrius nxm de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} & \dots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} & \dots & \mathrm{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a_{m1}} & \mathrm{a_{m2}} & \dots & \mathrm{a_{mn}} \end{pmatrix} iB = \begin{pmatrix} \mathrm{b_{11}} & \mathrm{b_{12}} & \dots & \mathrm{b_{1n}} \\ \mathrm{b_{21}} & \mathrm{b_{22}} & \dots & \mathrm{b_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{b_{m1}} & \mathrm{b_{m2}} & \dots & \mathrm{b_{mn}} \end{pmatrix}$$

podem definir les següents operacions:

- **Suma de matrius**:

$$A+B = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \dots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \dots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2} & \dots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{12} & \dots & \mathrm{b}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{b}_{21} & \mathrm{b}_{22} & \dots & \mathrm{b}_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{b}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{b}_{\mathrm{m}2} & \dots & \mathrm{b}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11}+\mathrm{b}_{11} & \mathrm{a}_{12}+\mathrm{b}_{12} & \dots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}+\mathrm{b}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{21}+\mathrm{b}_{21} & \mathrm{a}_{22}+\mathrm{b}_{22} & \dots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}}+\mathrm{b}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1}+\mathrm{b}_{m1} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2}+\mathrm{b}_{m2} & \dots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}}+\mathrm{b}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$$

- **Diferència de matrius**:

$$A-B = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \dots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \dots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2} & \dots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{12} & \dots & \mathrm{b}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{b}_{21} & \mathrm{b}_{22} & \dots & \mathrm{b}_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{b}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{b}_{\mathrm{m}2} & \dots & \mathrm{b}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11}-\mathrm{b}_{11} & \mathrm{a}_{12}-\mathrm{b}_{12} & \dots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}-\mathrm{b}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{21}-\mathrm{b}_{21} & \mathrm{a}_{22}-\mathrm{b}_{22} & \dots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}}-\mathrm{b}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1}-\mathrm{b}_{m1} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2}-\mathrm{b}_{m2} & \dots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}}-\mathrm{b}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$$

- **Producte d'una matriu per un escalar**:

$$k{\cdot}A = k{\cdot} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \dots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \dots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2} & \dots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{11} & \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{12} & \dots & \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{21} & \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{22} & \dots & \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{\mathrm{m}2} & \dots & \mathrm{k}{\cdot}\mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$$

.

Aquestes tres operacions verifiquent les següents propietats per qualsevols A,B,C matrius i k i m nombre reals:

- A+B=B+A (commutativa).
- A+(B+C)=(A+B)+C (associativa).
- A+(0)=(0)+A=A (element neutre de la suma).
- A+(-A)=(-A)+A=(0) (element oposat de la suma).

- k·(A+B)=k·A+k·B.
- (k+m)·A=k·A+m·A.
- (k·m)·A=k·(m·A).
- 1·A=A.

Observació: Amb aquestes propietats es diu que el conjunt de les matrius nxm amb les operacions suma i producte per escalar és un espai vectorial sobre els nombres reals.

- **Producte de matrius**: Siguin dues matrius

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} i B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

amb A que té el mateix nombre de columnes que B de fil·les. Aleshores definim

$$A{\cdot}B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

essent $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Exemples:

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{\cdot}5 + 3{\cdot}6 & 1{\cdot}7+3{\cdot}8 \\ 2{\cdot}5+4{\cdot}6 & 2{\cdot}7+4{\cdot}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} 1{\cdot}10+4{\cdot}11+7{\cdot}12 & 1{\cdot}13+4{\cdot}14+7{\cdot}15 & 1{\cdot}16+4{\cdot}17+7{\cdot}18 \\ 2{\cdot}10+5{\cdot}11+8{\cdot}12 & 2{\cdot}13+5{\cdot}14+8{\cdot}15 & 2{\cdot}16+5{\cdot}17+8{\cdot}18 \\ 3{\cdot}10+6{\cdot}11+9{\cdot}12 & 3{\cdot}13+6{\cdot}14+9{\cdot}15 & 3{\cdot}16+6{\cdot}17+9{\cdot}18 \end{pmatrix}$

Les propietats més importants del producte per matrius A,B i C compatibles amb el producte són:

- A·(B·C)=(A·B)·C (propietat associativa).
- A·Id=Id·A=A (neutre del producte).
- A·(B+C)=A·B+A·C (propietat distributiva).
- (A+B)·C=A·C+B·C (propietat distributiva).

Observem amb un exemple, però que la propietat commutativa no existeix:

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{\cdot}5+1{\cdot}1 & 1{\cdot}2+1{\cdot}3 \\ 2{\cdot}5+4{\cdot}1 & 2{\cdot}2+4{\cdot}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{\cdot}1+2{\cdot}2 & 5{\cdot}1+2{\cdot}4 \\ 1{\cdot}1+3{\cdot}2 & 1{\cdot}1+3{\cdot}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$.

Observem també que no tenim en principi tampoc l'existència d'element invers respecte del producte és a dir l'existència d'una matriu B tal que A·B=B·A=Id. De fet per matrius quadrades hi haurà cassos en que tindrem matriu inversa i cassos en que no.

Exemple: Sigui A la matriu A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula la matriu A^{-1}.

- $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  $\rightarrow \begin{pmatrix} 3a+2b & 3c+2d \\ 5a & 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3a+2b=1 \\ 5a=0 \\ 3c+2d=0 \\ 5c=0 \end{cases} \rightarrow$ I les solucions per aquest sistema són a=0, b=$\frac{1}{2}$, c=$\frac{1}{3}$ i d=$\frac{-3}{10}$.

Per tant $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{10} \end{pmatrix}$.

Determinants d'una matriu quadrada

1. Donada una matriu quadrada d'ordre 2, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ definim el seu determinant com $\det A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$.

2. Donada una matriu quadrada d'ordre 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ definim el seu determinant com

$$detA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

3. Donada una matriu quadrada d'ordre 4, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ definim el seu determinant de forma anàloga al cas anterior és a dir

$$detA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} - a_{21}\cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} + a_{31}\cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} - a_{41}\cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

.

4. Donada una matriu quadrada d'ordre n definim el seu determinant fixada una columna com det$A=\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\cdot A_{ji}\cdot(-1)^{j+i}$ essent A_{ji} el determinant que surt d'eliminar la fil·la i la columna ji respectivament.

Exemples:

- $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ =8·2-1·5=11.
- $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ =-26-23+66=17.
- $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ =39-90-12=-63.
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ = 3·(-18)-1·(-20)=-34.

Propietats dels determinants

1. Si tots els elements d'una fila o una columna es descomponent en dos sumands, el seu determinant és la suma de dos determinants que tenen en aquesta filera o columna el primer i el segon sumands, respectivament, i a les altres tenen els mateixos elements que el determinant inicial.

   - $\begin{bmatrix} 3{+}5 & 5 \\ 2{+}4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.
   - $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3{+}6 & 5\text{-}6 & 1{+}8 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & -6 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

2. Si és multipliquen tots els elements d'una filera o una columna d'una matriu quadrada per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre.

- $\begin{bmatrix} 2{\cdot}5 & 5 \\ 2{\cdot}4 & 2 \end{bmatrix} = 2{\cdot}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2{\cdot}9 & 2{\cdot}6 & 2{\cdot}8 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = 2{\cdot}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

3. Donades dues matrius A i B quadrades nxn aleshores det(A·B)=det(A)·det(B) mentre que det(^{t}A)=det(A).

4. Si intercanviem dues fileres o dues columnes d'una matriu quadrada el determinant d'aquesta última matriu és el mateix que el de la primera però canviat de signe.

- $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Si una matriu quadrada té una filera o una columna amb tots els elements nuls, el seu determinant és 0.

- $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$.

6. Si una filera o una columna d'una matriu quadrada és una combinació lineal de la resta de fileres o columnes aleshores el seu determinant és 0.

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & 15 \end{bmatrix} = 0$ ja que $F_3 = 3{\cdot}F_1+0{\cdot}F_2$.
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 3 & 11 & 9 \end{bmatrix} = 0$ ja que $F_3 = F_1+F_2$.
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 14 \end{bmatrix} = 0$ ja que $C_3 = 2{\cdot}C_1+C_2$.

7. Si una filera o una columna d'una matriu quadrada se'n suma una altra de paral·lela multiplicada per un nombre el seu determinant no varia.

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 23 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ja que a la segona filera hi hem sumat $3{\cdot}F_1$-F_3.
- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 8 \\ 30 & 2 & 2 & 4 \\ 10 & 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -13 & -43 & -11 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ fent $\begin{pmatrix} F_2 - \frac{5}{2}F_1\ (F_2) \\ F_3 - 15F_1\ (F_3) \\ F_4 - 5F_1\ (F_4) \end{pmatrix}$
i per tant tindrem
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -13 & -43 & -11 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{bmatrix} = 2{\cdot} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{11}{2} \\ -13 & -43 & -11 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ fent $\begin{pmatrix} F_2 - 3F_1\ (F_2) \\ F_3 - 2F_1\ (F_3) \\ F_4 - F_1\ (F_4) \end{pmatrix}$ i per tant tindrem
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 1{\cdot} \begin{bmatrix} -2 & -7 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}. = (-2){\cdot}(-4)=8.$

Matriu inversa

Donada una matriu quadrada A de dimensió n definim la seva inversa com aquella matriu A^{-1} tal que $A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = Id$.

En principi no sempre existirà i en aquest apartat ens limitarem a trobar un mètode per tal de poder-la calcular.

Observem d'entrada que $A{\cdot}A^{-1} = A{\cdot}A^{-1} = Id$ i aleshores per la propietat $\det(A{\cdot}A^{-1}) = 1$ $\rightarrow \det A{\cdot}\det A^{-1} = 1 \rightarrow$ Si ha d'existir inversa el $\det A \neq 0$.

Càlcul de la matriu inversa.

Exemple 1:

Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ anem a veure tots els passos que s'han de realitzar per calcular la seva inversa.

1. det(A)=1·7+2·2=11≠0.

2. Trasposem la matriu trasposta de A→ ^{t}A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3. Calculem l'anomenada matriu dels adjunts de la trasposta →

$$^{adj}(^{t}A) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \text{-30} & 2 \\ 2 & 4 & \text{-1} \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Finalment $A^{-1} = \frac{^{adj}(^{t}A)}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & \text{-30} & 2 \\ 2 & 4 & \text{-1} \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}}{11} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{-30}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{7}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$.

5. Comprovem-ho : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{-30}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{7}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2:

Sigui A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$anem a calcular la seva inversa.

1. det(A)=3·0-1·4+2·4=4≠0.

2. Trasposem la matriu trasposta de A→ ^{t}A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Calculem l'anomenada matriu dels adjunts de la trasposta →

$$^{\mathrm{adj}}({}^{t}A) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Finalment $A^{-1} = \frac{^{\mathrm{adj}}({}^{t}A)}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Comprovem-ho: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 3:

Sigui $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ anem a calcular la seva inversa.

1. $\det(A)=3\cdot 0-1\cdot 8+2\cdot 4=0$.

   Per tant aquesta matriu no té inversa.

En resum per tal de calcular la inversa d'una matriu quadrada A cal realitzar els següents passos:

1. Calculem el determinant de la matriu A, si aquest determinant és 0 aleshores la matriu inversa no existirà i per tant no podrem continuar.

2. Fem la trasposta d' $A \to {}^{t}A$.

3. Fem la matriu adjunta d'$A \to {}^{\mathrm{adj}}({}^{t}A)$.

4. Finalment $A^{-1} = \frac{^{\mathrm{adj}}({}^{t}A)}{\det A}$.

Exercicis resolts

Exercici 1. Siguin A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ i B=$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ troba i calcula 2A+4B, 3A-2B, A·B, B·A, A^2, A^{-1}.

- $2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & -6 \\ 0 & 22 & 14 \\ 18 & 20 & 20 \end{pmatrix}$.

- $3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -5 & 9 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -4 \\ 13 & 23 & 18 \\ 46 & 30 & 12 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & -3 \\ 5 & 20 & 16 \\ 20 & 32 & 18 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -4 & 29 & 29 \\ 24 & 22 & 18 \end{pmatrix}$.

- Matriu inversa d'A: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ detA=2≠0→

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 24 \\ -6 & 16 & -2 \\ 8 & -7 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(A^{adj})^t = \begin{pmatrix} 14 & -6 & 8 \\ -6 & 16 & -7 \\ 24 & -2 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -3 & 8 & -7/2 \\ 12 & -1 & 17/2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 2. Sigui A= $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & \text{-4} & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ troba A^2, A^3, A^{228}.

- $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & \text{-4} & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & \text{-4} & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & \text{-3} & -1 \\ 0 & 1 & \text{-1} \end{pmatrix}$.

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & \text{-3} & -1 \\ 0 & 1 & \text{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & \text{-4} & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Per tant com que $A^{228} = A^{76 \cdot 3+0} = (A^3)^{76} = (\text{Id})^{76} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercici 3. Siguin A= $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ i B= $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ troba els valors de a, b i c per tal que A·B=B·A.

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b\text{-}4c \\ 2a & 2b\text{-}3c \end{pmatrix}$

  $B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2b & -4a\text{-}3b \\ 2c & -3c \end{pmatrix}$

  Aleshores $\left\{ \begin{array}{c} 3a+2b=3a \\ 3b\text{-}4c=\text{-}4a\text{-}3b \\ 2a=2c \\ 2b\text{-}3c=\text{-}3c \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=0 \\ a=c \\ a=c \\ b=0 \end{array} \right.$.

Exercici 4. Donada la matriu A= $\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & p\text{-}1 \end{pmatrix}$

1. Troba el valor de p pel qual A té inversa.
2. Pel valor P=2 troba la matriu inversa.
3. Resol el sistema $\left\{ \begin{array}{c} px=1 \\ x+py+z=3 \\ x+(p\text{-}1)z=4 \end{array} \right.$ per p=2 seguint el mètode de la matriu inversa.

- Per tal que A tingui inversa cal que el seu determinant sigui diferent de 0, per tant tindrem $\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & p\text{-}1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow p^2 \cdot (p\text{-}1)=0 \rightarrow \begin{cases} p=0 \\ p=1 \end{cases}$.

  Per tant existirà inversa sempre que p≠0,1.

  Per p=2 la matriu que haurem de fer la inversa serà $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ detA=4→

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & -\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ -\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & -\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} & -\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(A^{adj})^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  El sistema per tant que tindrem serà $\begin{cases} 2x=1 \\ x+2y+z=3 \\ x+z=4 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Exercici 4. Calcula $\begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{bmatrix}$.

- $\begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{bmatrix} =_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} \begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 0.$

Exercicis per resoldre

1. Considerem les matrius $A=\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2b+1 & 1 \\ 2 & a+b \end{pmatrix}$ troba els valors d'a i b sabent que A=B.

2. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

- A+2B-5C.
- 3·A+4$^{\mathrm{t}}$C.
- A·B.
- B·A.
- A·C.
- A·B+A·C.
- A·(B+C).
- ^{t}A·$^{\mathrm{t}}$B
- $^{\mathrm{t}}(B$·A).

3. Troba els valors d'a,b,c per tal que les matrius següents siguin simètriques:

- $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ \mathrm{a} & 7 & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & 8 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{a+b} \\ \mathrm{a\text{-}b} & \mathrm{b} \end{pmatrix}.$

4. Siguin A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Resol l'equació 3·(X-A)=2·(X+B).

5. Calcula A·B, ^{t}A·$^{\mathrm{t}}$B essent A=$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ i B=$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Calcula el determinant de les matrius A, B, C de l'exercici 2.

7. Donada la matriu A=$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ calcula A^2, A^3 i A^{58}, A^{157}.ç

8. Calcula el valor dels següents determinants

- $\begin{bmatrix} 1 & \text{-1} \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 9 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

9. Resol la següent equació $\begin{bmatrix} \text{a} & 1 & -1 \\ \text{-a} & \text{a-1} & 0 \\ -1 & -2 & \text{a+1} \end{bmatrix} = 0.$

10. Calcula la inversa de les següents matrius

- $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$