# Solucions examen 4

1.- *Un terreny rectangular de 20 metres quadrats d'àrea es vol tancar. Els preus de la tanca són 3 Euros cada metre d'alçada i 7 per cada metre d'amplada.*

a) *Calcula quines han d'ésser les dimensions més econòmiques d'aquest camp.*

b) Quan val aleshores tancar aquest camp?

*Demostració.* La funció que volem minimitzar és la funció

$$P = 3x + 3x + 7y + 7y$$

$$P = 6x + 14y$$

amb la relació que l' àrea és $xy = 20$. Aleshores

$$y = \frac{20}{x}$$

D' aquesta manera,

$$P = 6x + 14 \cdot \frac{20}{x}$$

$$P = 6x + \frac{280}{x}$$

essent $x > 0$.

Així,

$$P' = 6 - \frac{280}{x^2}$$

Aleshores,

$$6 - \frac{280}{x^2} = 0$$

$$\frac{6x^2 - 280}{x^2} = 0$$

$$6x^2 - 280 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{280}{6}} = \sqrt{\frac{140}{3}}$$

Finalment, com que $P'(1) = 6 - \frac{280}{1^2} < 0$ i $P'(10) = 6 - \frac{240}{10^2} > 0$, amb la qual cosa $x = \sqrt{\frac{140}{3}}$ és un mínim de $P$ i, per tant, $y = \frac{20}{\sqrt{\frac{140}{3}}}$.

b) El preu és $P = 6\cdot\sqrt{\frac{140}{3}} + \frac{280}{\sqrt{\frac{140}{3}}}$

2.- *Representa gràficament la funció*

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$$

*Demostració.*

1. **Domini.**
   - $D = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$.
2. **Punts de tall amb els eixos.**
   - $EixX$ : $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{y}=\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2-4} \\ \mathrm{y}=0 \end{array}\right. \rightarrow \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2-4} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0.$
   - $EixY$: $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{y}=\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2-4} \\ \mathrm{x}=0 \end{array}\right. \rightarrow$ y=0 i per tant el punt de tall amb l'Eix de les $Y$ és $(0,0)$.
3. **Simetries.**
   - $f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2-4} = \frac{-2x}{x^2-4} = -f(x)$. Per tant tenim simetria senar.
4. **Assímptotes.**
   - Verticals:
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow -2^+} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow -2^-} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty$.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2-4} = 0$.
   - Obliqües: no n' hi ha.
5. **Creixement i decreixement.**

- $f\prime(x) = \frac{2\cdot(x^2-4)-2x\cdot 2\mathrm{x}}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} = \rightarrow$ no té solució i, per tant, el domini quedarà dividit en (-$\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ i si prenem un punt de cada interval tindrem

  $f\prime(-7) < 0$, $f\prime(-1) < 0$, $f\prime(-1) < 0$, $f\prime(-7) < 0$ i, aleshores, $f$ és sempre decreixent.

6. **Màxims i mínims relatius.**

   - No existeixen.

7. **Concavitat i convexitat.**

   - $f\text{J}(x) = \frac{\text{-4x}(\mathrm{x}^2-4)^2-2(x^2-4)2x(-2x^2-8)}{(x^2-4)^4} = \frac{(\mathrm{x}^2-4)(-4x(x^2-4)+8x^3+32x^2)}{(x^2-25)^4} = \frac{4x^3+32x^2+16x}{(x^2-25)^3} = 0 \rightarrow x(4x^2 + 32x + 16) = 0 \rightarrow x = 0.$

- $D = \mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (5, +\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem $f\text{J}(-6)<0$, $f\text{J}(0) > 0$ i $f\text{J}(6)<0$ per tant trobem que

1. -
     - $f$ cóncava en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.
     - $f$ convexa en (-2, $0) \cup (2, +\infty)$.

8. **Punts d'inflexió.**

$f$ presenta un punt d'inflexió en x=0 que val f(0)=0.

9. **Taula de valors.**

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |

10. **Representació gràfica.**