Solucions examen 6

1.- Troba els valors de a i b per tal que la funció f(x)=$x^3 + ax^2 + b$ presenti un extrem relatiu en (1,3).

En efecte, f presenta un extrem relatiu en x=1, per tant, de les dues condicions obtenim:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \rightarrow \text{ 1+a+b=3} \rightarrow b = 2 - a \\ f'(1) &= 0 \rightarrow \text{ 3+2a=0} \rightarrow \text{ a=}\frac{-3}{2} \end{aligned}$$

$$b = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

2.- *Donada la funció*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

Calcula

1. **Domini.**
   - $D = \mathbb{R}$
2. **Assímptotes.**
   - Verticals: No existeixen
   - Horitzontals:
     - $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2}{x^2+1} = 1$
3. **Creixement i decreixement.**
   - $f\prime(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow$ x=0 i, per tant, el domini quedarà dividit en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ i si prenem un punt de cada interval tindrem
   - $f\prime(-1) > 0$, $f\prime(1) < 0$ i, aleshores,
   - f creix $(-\infty, 0)$
     f decreix $(0, +\infty)$
4. **Màxims i mínims relatius.**

- f presenta un màxim en x=0 que val f(0)=2

5. **Concavitat i convexitat.**

   - $f\mathrm{J}(x) = \frac{\text{-2}(\mathrm{x}^2+1)^2-2(x^2+1)2x(-2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{(\mathrm{x}^2+1)(-2(x^2+1)+8x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow$ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Per tant el domini queda dividit en $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}) \cup (-\sqrt{\frac{1}{3}}, 1) \cup$ $(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem $f\mathrm{J}(-6)>0$, $f\mathrm{J}(0) < 0$ i $f\mathrm{J}(6)>0$ per tant trobem que
   - **Punts d' inflexió**

   cóncava en $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty)$.

   f convexa en (-$\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$).

8. **Punts d'inflexió.**

f presenta un punt d'inflexió en x=$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ que val f($\sqrt{\frac{1}{3}}$)=$\frac{7}{4}$.

3.- Troba les dimensions d' un pot cilíndric obert d' 2 litre per tal que pugui construir-se amb la menor quantitat possible de material.

- Siguin r i h el radi i l'alçada d'aquest cilindre aleshores la funció que voldrem optimitzar serà

$$\mathrm{A}=\pi\cdot\mathrm{r}^2+2\cdot\pi\cdot\mathrm{r}\cdot\mathrm{h}$$

  amb la condició que el volum ha d'ésser 1 litre i per tant $\pi\cdot\mathrm{r}^2\cdot\mathrm{h}=2\rightarrow$ h=$\frac{2}{\pi\mathrm{r}^2}$ amb la qual cosa la funció que voldrem fer màxima o mínims serà

$$\mathrm{A}=\pi\cdot\mathrm{r}^2+2\cdot\pi\cdot\mathrm{r}\cdot\frac{2}{\pi\mathrm{r}^2} = \pi\cdot\mathrm{r}^2+\frac{2}{\mathrm{r}}$$

  I com que les dimensions han d'ésser positives D=$\mathbb{R}^+$

  Si la derivem i la igualem a 0 tindrem

  A'=$2\cdot\pi\cdot\mathrm{r}$-$\frac{2}{\mathrm{r}^2} = 0 \rightarrow 2\cdot\pi\cdot\mathrm{r}^3\text{-}2 = 0 \rightarrow \mathrm{r}^3 = \frac{2}{2\pi} \rightarrow \mathrm{r}=\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}}$, com que

  A'(0,1)$<$ 0

  A'(10)$>$ 0.

Així entre $(0,\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})$ la funció serà decreixent mentre que en $(\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}},+\infty)$ la funció serà creixent i per tant la funció presentarà un mínim en r=$\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}}$, h=$\frac{8}{\pi\cdot(\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})^2}$ i A=$\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}}^2+2\cdot\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}}\cdot\frac{1}{\pi\cdot(\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})^2}=\pi\cdot(\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})^2+\frac{2}{(\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})}$.

4.- Resol les següents integrals

- $\int\sqrt{x}+3x^2-4x+5dx=\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+x^3-2x^2+5x+C$
- $\int(2x-5)^6dx=\dfrac{1}{2}\int 2\cdot(2x-5)^6dx=\frac{1}{2}\frac{(2x-5)^7}{7}+C=\frac{(2x-5)^7}{14}+C$
- $\int\dfrac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)+C$
- $\int\sin(x^3+2)x^2dx=\dfrac{1}{3}\int 3\cdot\sin(x^3+2)x^2dx=-\frac{1}{3}\cos(x^3+2)+C$
- $\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2e^{\sqrt{x}}+C$
- $\int\frac{2}{3+5x^2}$dx=$2\cdot\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+(\sqrt{\frac{5}{3}}x)^2}$dx=$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\int\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{1+(\sqrt{\frac{5}{3}}x)^2}$dx=$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot arctag(\sqrt{\frac{5}{3}}x)+C$.

5.- Troba l' àrea de la regió limitada per les funcions f(x)=2x+3 i f(x)=x^2+x+1

- Anem a trobar primerament els punts de tall de les dues funcions.
  $\left\{\begin{array}{c} y=x^2+x+1 \\ y=2x+3 \end{array}\right. \rightarrow x^2+x+1=2x+3\rightarrow x^2-x-2=0\rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ a més a més tal com es veu en la figura 1.4 la recta va per sobre de la paràbola en

aquest interval, per tant l'àrea demanda serà A=$\int\limits_{-1}^{2}$ 2x+3-x$^2 - x - 1dx$ dx=

$$\int\limits_{-1}^{2} -x^2 + x + 2dx = \Big\{_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2 = (\frac{-8}{3} + 4) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2) = \frac{5}{2}$$