Solucions examen 6

1.- *Donades les matrius*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculeu:

a) AB^{-1}

b) $2A\text{-}B^3$

En efecte:

Calculem, primerament B^{-1} :Sigui A=$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ anem a veure tots els passos que s'han de realitzar per calcular la seva inversa.

1. det(A)=-3

2. Trasposem la matriu trasposta de A$\rightarrow$ ^{t}A=$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Calculem l'anomenada matriu dels adjunts de la trasposta $\rightarrow$

$$\mathrm{adj}({}^{t}A) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Finalment $A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}({}^{t}A)}{\det A} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

a) $AB^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{14}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b)

$$B^3=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -27 & 8 & 24 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

finalment,

$$2\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -27 & 8 & 24 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 & -8 & -22 \\ 2 & -9 & -4 \\ 2 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

2.- Estudia el sistema d'equacions

$$\begin{gathered} x+2y+z=3 \\ 3x+ay+3z=1 \\ 5x+y+z=5 \end{gathered}$$

- Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & a & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & a & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

  La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A.

  Aleshores $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & a & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = a-3-3+5(6-a)=-4a+24=0$\rightarrow$ a=6.

  Si **a$\neq$6** com que detA$\neq$0 aleshores RangA=3 i per tant RangB=3, aleshores:

  $\left\{\begin{array}{r} \text{RangA=3} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array}\right.$ $\rightarrow$ El sistema serà compatible determinat i les seves solucions seran:

x= $\frac{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{-4a+24}$ = $\frac{\text{-2a+20}}{\text{-a+3}}$, y= $\frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}}{-4a+24}$ = $\frac{20}{\text{-4a+24}}$, y= $\frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}}{-4a+24}$ = $\frac{-10a-12}{\text{-4a+24}}$.

Per altra banda si **a=6** aleshores el sistema sortirà

$$\begin{gathered} x+2y+z=3 \\ 3x+6y+3z=1 \\ 5x+y+z=5 \end{gathered}$$

Aquest sistema té per matriu associada A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B= $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)$ i com que detA=0, $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ =3 tindrem que rangA=2. Per altra banda $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ = -72≠0 i d'aquesta manera el rang de B serà 3. Així, doncs, tindrem:

$$\left\{\begin{array}{r} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array}\right. \longrightarrow \text{El sistema serà incompatible per a=6.}$$

3.- *Donada la funció*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

Calcula

1. **Domini.**
   - $D = \mathbb{R}$
2. **Assímptotes.**
   - Verticals: No existeixen
   - Horitzontals:

– $\lim_{\mathrm{x}\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=1$

3. **Creixement i decreixement.**

- $f\prime(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2+2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow$ x=0 i, per tant, el domini quedarà dividit en $(\text{-}\infty,0)\cup(0,+\infty)$ i si prenem un punt de cada interval tindrem
- $f\prime(-1)>0$, $f\prime(1)<0$ i, aleshores,
- f creix $(\text{-}\infty,0)$
  f decreix $(0,+\infty)$

4. **Màxims i mínims relatius.**

- f presenta un màxim en x=0 que val f(0)=2

5. **Concavitat i convexitat.**

- $f\jmath(x)=\frac{\text{-}2(\mathrm{x}^2+1)^2-2(x^2+1)2x(-2x)}{(x^2+1)^4}=\frac{(\mathrm{x}^2+1)(-2(x^2+1)+8x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Per tant el domini queda dividit en $(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})\cup(-\sqrt{\frac{1}{3}},1)\cup(\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem $f\jmath(-6)$>0, $f\jmath(0)<0$ i $f\jmath(6)$>0 per tant trobem que
- **Punts d' inflexió**

cóncava en $(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})\cup(\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty)$.

f convexa en (-$\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}$).

8. **Punts d'inflexió.**

f presenta un punt d'inflexió en x=$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ que val f($\sqrt{\frac{1}{3}}$)=$\frac{7}{4}$.

4.- Troba les dimensions d' un pot cilíndric obert d' 2 litre per tal que pugui construir-se amb la menor quantitat possible de material.

- Siguin r i h el radi i l'alçada d'aquest cilindre aleshores la funció que voldrem optimitzar serà

$$\mathrm{A}=\pi\cdot\mathrm{r}^2+2\cdot\pi\cdot\mathrm{r}\cdot\mathrm{h}$$

amb la condició que el volum ha d'ésser 1 litre i per tant $\pi \cdot \mathrm{r}^2 \cdot \mathrm{h}=2 \rightarrow \mathrm{h}=\frac{2}{\pi \mathrm{r}^2}$
amb la qual cosa la funció que voldrem fer màxima o mínims serà

$$\mathrm{A}=\pi \cdot \mathrm{r}^2+2 \cdot \pi \cdot \mathrm{r} \cdot \frac{2}{\pi \mathrm{r}^2}=\pi \cdot \mathrm{r}^2+\frac{2}{\mathrm{r}}$$

I com que les dimensions han d'ésser positives $\mathrm{D}=\mathbb{R}^+$

Si la derivem i la igualem a 0 tindrem

$\mathrm{A}'=2 \cdot \pi \cdot \mathrm{r}-\frac{2}{\mathrm{r}^2}=0 \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{r}^3-2=0 \rightarrow \mathrm{r}^3=\frac{2}{2\pi} \rightarrow \mathrm{r}=\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}}$, com que

$\mathrm{A}'(0{,}1)<0$

$\mathrm{A}'(10)>0$.

Així entre $(0,\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})$ la funció serà decreixent mentre que en $(\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}},+\infty)$ la funció serà creixent i per tant la funció presentarà un mínim en $\mathrm{r}=\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}}$, $\mathrm{h}=\frac{8}{\pi \cdot (\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})^2}$ i $\mathrm{A}=\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}}^{2}+2 \cdot \pi \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}} \cdot \frac{1}{\pi \cdot (\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})^2}=\pi \cdot (\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})^2+\frac{2}{(\sqrt[3]{\frac{2}{2\pi}})}$.