Càlcul d'àrees utilitzant integrals

Sigui y=f(x) una funció tal que $\int$ f(x) dx=F(x)+C aleshores podem definir

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \text{ essent } b \geq a.$$

Aquest càlcul es coneix amb el nom de **regla de Barrow** i representa l'àrea del gràfic comprés entre l'eix de les X i la funció y=f(x) en l'interval [a,b].

En general la regla de Barrow serveix per calcula àrees entre dues o més funcions ja que donades dues funcions y=f(x) i y=g(x) aleshores l'àrea del recinte limitat pel gràfic d'aquestes dues funcions serà $A=\left|\int_a^b f(x)-g(x)dx\right|$.

Exemple 1. *Troba l'àrea del recinte limitat per la funció y=x^3 i l'eix de les X en l'interval [1,3].*

- Tal com indica la figura 1.1 l'àrea d'aquesta figura serà $A=\int_1^3 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{81}{4}-\frac{1}{4}=20$ unitats quadrades.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

Exemple 2. *Troba l'àrea del recinte limitat per la funció* $y{=}x^3$ *i l'eix de les X en l'interval [-1,0].*

- En aquest cas el recinte limitat està per sota de l'eix de les X ja que la funció $y{=}x^3$ està per sota de y=0 en l'interval [-1,0] tal com s'indica en la figura 1.2. Aleshores l'àrea d'aquesta regió serà $A{=}\int_{-1}^{0} -x^3 \, dx{=} \left.\frac{-x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$ unitats quadrades.

Exemple 3. *Troba l'àrea del recinte limitat per la funció* $y{=}x^3$ *i l'eix de les X en l'interval [-1,2].*

- En aquest cas tindrem dues àrees per calcula una quan la recta y=0 està per sobre de la funció que passarà entre [-1,0] i a l'inversa que succeirà entre [0,2] tal com s'indica en la figura 1.3.

  Aleshores l'àrea del recinte demanat serà $\int_{-1}^{0} -x^3 \, dx + \int_{0}^{2} x^3 \, dx{=}\frac{1}{4} + \left.\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} =$ $\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$ unitats quadrades.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

Exemple 4. *Troba l'àrea del recinte limitat per la recta y=x+2 i la paràbola* $y=x^2$

- Anem a trobar primerament els punts de tall de les dues funcions.

  $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{y{=}x^2} \\ \mathrm{y{=}x{+}2} \end{array}\right. \rightarrow \mathrm{x^2 = x+2} \rightarrow \mathrm{x^2 - x\text{-}2 = 0} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ \mathrm{x{=}\text{-}1} \end{array}\right.$ a més a més tal com es veu en la figura 1.4 la recta va per sobre de la paràbola en aquest interval, per tant l'àrea demanda serà $\mathrm{A}=\int\limits_{-1}^{2} \mathrm{x+2\text{-}x^2\ dx} = \frac{\mathrm{x}^2}{2} + 2\mathrm{x}\text{-}\frac{\mathrm{x}^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = (2 + 4 - \frac{8}{3}) - (\frac{-1}{2} - 2 + \frac{1}{3}) = \frac{9}{2}$ unitats quadrades.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

Exemple 5. *Troba l'àrea del recinte limitat per les funcions f(x)=x^2-6 i g(x)=-x^2+2.*

- Anem a trobar primerament els punts de tall de les dues funcions.

  $\begin{cases} y=x^2-6 \\ y=-x^2+2 \end{cases} \rightarrow x^2-6=-x^2+2 \rightarrow 2x^2=8 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \rightarrow$ a més a més tal com es veu en la figura 1.5 la parabola y=-x^2+2 va per sobre de la paràbola y=x^2-6 en aquest interval, per tant l'àrea demanda serà A=$\int_{-1}^{2}$-x^2+2-x^2+6dx=$\int_{-1}^{2}$-2x^2+8 dx = $-2\cdot\frac{x^3}{3}+8x\Big]_{-2}^{2}=(-\frac{16}{3}+16)-(\frac{16}{3}-16)=\frac{64}{3}$ unitats quadrades.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

Exemple 6. *Troba l'àrea del recinte limitat per la recta $y=x$ i la paràbola $y=x^3$.*

- Anem a trobar primerament els punts de tall de les dues funcions.

  $\begin{cases} \mathrm{y=x} \\ \mathrm{y=\text{-}x^3} \end{cases} \rightarrow \mathrm{x}^3 = \mathrm{x} \rightarrow \mathrm{x}^3\text{-}\mathrm{x}=0 \rightarrow \mathrm{x} \cdot (\mathrm{x}^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x=0} \\ \mathrm{x=1} \\ \mathrm{x=\text{-}1} \end{cases}$ a més a més tal com indica la figura 1.6 trobem que la corba va per sobre de la recta en [-1,0] mentre que és a l'inrevés en [0,1]. Així, doncs, l'àrea d'aquesta regió serà:

  $\mathrm{A}= \int_{-1}^{0} \mathrm{x}^3 - \mathrm{x}\ \mathrm{dx} + \int_{0}^{1} \mathrm{x}\text{-}\mathrm{x}^3\ \mathrm{dx} = \left. \frac{\mathrm{x}^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left. \frac{x^2}{2} - \frac{\mathrm{x}^4}{4} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ unitats quadrades.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

Exemple 7. *Calcula l'àrea de la regió limitada per la funció f(x)=e^x, l'eix de les X entre -1 i 2.*

- La regió limitada que ens estan demanant ve donada per la figura 1.7. Per tant l'àrea demanada seràl'integral A= $\int_{-1}^{2} e^x \, dx = e^2 - e^{-1}$.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

Exemple 8. *Troba l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció* $f(x)=x^2-3x+2$ *i l'eix de les X.*

- La regió limitada que ens estan demanant ve donada per la figura 1.8. Anem a trobar abans de calcular l'àrea la intersecció d'aquesta gràfica amb l'eix de les X:
  $x^2-3x+2=0\rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9\text{-}8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$ i com que aquest gràfic està per sota de l'eix de les X tindrem $A=\int_1^2 -x^2+3x\text{-}2dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x]_1^2=$ $(-\frac{8}{3}+6-4)-(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2)=+4-\frac{7}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$ unitats quadrades.

Exemple 9. *Troba l'àrea de la regió limitada pel gràfic de les funcions* $f(x)=x^2+3x\text{-}2$ *i* $g(x)=2x$.

- La regió limitada que ens estan demanant ve donada per la figura 1.9. Anem a trobar primerament els punts de tall de la intersecció de les dues corbes.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

$$\begin{cases} y=x^2+3x-2 \\ y=2x \end{cases} \rightarrow x^2+3x-2=2x \rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}.$$

Per tant l'àrea limitada per aquestes dues funcions serà $A=\int_{-2}^{1} 2x-(x^2+3x-2)$ $dx= \int_{-2}^{1} -x^2-x+2 \; dx= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x]_1^2 = (-\frac{8}{3} - 2 + 4) - (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2) = +4 - \frac{7}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$ unitats quadrades.

Exemple 10. *Troba l'àrea de la regió limitada per lacorba f(x)=sinx entre [0,2π] i l'eix de les X.*

- Segons la figura 1.10 en aquest cas cal dividir l'interval [0,2π] en dos parts [0,π] on la funció està per sobre l'eix de les X i [π,2π] on la funció està per sota d'aquest eix. Per tant la seva àrea serà:

  $A=\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx- \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx=-\cos x]_0^{\pi} + \cos x]_{\pi}^{2\pi} = (-(-1)+1) + (1-(-1))=4$ unitats quadrades.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

Exemple 11. *Troba l'àrea de la regió limitada per les corbes f(x)=$x^2 - 1$ i f(x)=-$x^2 + 1$.*

- La regió limitada que ens estan demanant ve donada per la figura 1.11. Anem a trobar primerament els punts de tall de la intersecció de les dues corbes.

  $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{y{=}x^2\text{-}1} \\ \mathrm{y{=}\text{-}x^2} + 1 \end{array} \right. \rightarrow \mathrm{x^2\text{-}1{=}\text{-}x^2} + 1 \rightarrow 2\mathrm{x}^2 = 2 \rightarrow \mathrm{x^2{=}1}\rightarrow \mathrm{x{=}} \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{x{=}1} \\ \mathrm{x{=}\text{-}1} \end{array} \right.$. Per tant l'àrea limitada per aquestes dues funcions serà A=$\int_{-1}^{1}$ -$\mathrm{x^2}$+1-($\mathrm{x^2}$-1) dx= $\int_{-1}^{1}$ -2$\mathrm{x^2}$+2 dx= $\frac{-2\mathrm{x}^3}{3} + 2\mathrm{x}_{-1}^{1}\big] = (\frac{-2}{3} + 2) - (\frac{2}{3} - 2) = \frac{8}{3}$ unitats quadrades.

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!