Resolució d' exercicis per entregar

1. *Es vol fabricar una llauna de conserves en forma de cilindre amb una àrea total de 150 cm^2 i volum màxim. Determina'n el radi i l'alçada.*

   Demostració. Siguin r i h el radi i l'alçada d'aquest cilindre aleshores la funció que voldrem optimitzar serà

   $$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

   amb la condició que l' àrea ha d' ésser amb la qual cosa la funció que voldrem fer màxima o mínims serà

   $$2\pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 150$$
   $$h = \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

- Aleshores,

   $$V = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$
   $$V = 75r - \pi r^3$$

   I com que les dimensions han d'ésser positives $D = \mathbb{R}^+$

   Si la derivem i la igualem a 0 tindrem

   $V\prime = 75 - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow 3 \cdot \pi \cdot \mathrm{r}^2\text{-}75 = 0 \rightarrow \mathrm{r}^2 = \frac{75}{3\pi} \rightarrow \mathrm{r}=\sqrt{\frac{25}{\pi}}$, com que

   $V\prime(1) = 75 - 3\pi > 0$

   $V\prime(5) = 75 - 3\pi\sqrt{\frac{25}{\pi}} < 0.$

   Així tenim un màxim en $r = \sqrt{\frac{25}{\pi}}$, $h = \frac{150 - 2\pi\frac{25}{\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{25}{\pi}}}$

2. *La suma de les arestes d'un prisme recta de base quadrada és 96 metres. Troba les dimensions del que té volum màxim.*

   Demostració. Siguin x el costat de la base i y l'alçadad d'aquest prisme la funció que volem optimitzar en aquest cas és

   $$V = x^2 \cdot y$$

   amb la relació $4y + 8x = 96 \rightarrow y = \frac{96-8x}{4} = 24 - 2x$ que té per domini $D = R^+$ i substituint-la en la funció que es preten optimitzar tindrem $V = x^2 \cdot 24 - 2x \rightarrow V = (24x^2\text{-}2x^3)$ i si derivem i igualem a 0:

- $V\prime = 48x - 6x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$ i com que

  $v\prime(1) > 0.$

  $v\prime(10) < 0.$

  Per tant la funció presenta un màxim en $x = 8$ i $y = 24 - 2{\cdot}8 = 8$.

3. *Troba les dimensions d'un pot cilíndric d'1 litre de capacitat per tal que es pugui construir amb la menor quantitat possible de material.*

   Demostració. Siguin r i h el radi i l'alçada d'aquest cilindre aleshores la funció que voldrem optimitzar serà

$$\mathrm{A}{=}\pi{\cdot}\mathrm{r}^2{+}2{\cdot}\pi{\cdot}\mathrm{r}{\cdot}\mathrm{h}$$

- amb la condició que el volum ha d'ésser 1 litre i per tant $\pi{\cdot}\mathrm{r}^2{\cdot}\mathrm{h}{=}1{\rightarrow}\ \mathrm{h}{=}\frac{1}{\pi\mathrm{r}^2}$ amb la qual cosa la funció que voldrem fer màxima o mínims serà

$$\mathrm{A}{=}\pi{\cdot}\mathrm{r}^2{+}2{\cdot}\pi{\cdot}\mathrm{r}{\cdot}\frac{1}{\pi\mathrm{r}^2} = \pi{\cdot}\mathrm{r}^2{+}\frac{2}{\mathrm{r}}$$

  I com que les dimensions han d'ésser positives $\mathrm{D}{=}\mathbb{R}^+$

  Si la derivem i la igualem a 0 tindrem

  $\mathrm{A'}{=}2{\cdot}\pi{\cdot}\mathrm{r}{-}\frac{1}{\mathrm{r}^2} = 0 \rightarrow 2{\cdot}\pi{\cdot}\mathrm{r}^3{-}1 = 0 \rightarrow \mathrm{r}^3 = \frac{1}{2\pi} \rightarrow \mathrm{r}{=}\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$, com que

  $A\prime(0,1) = 2{\cdot}\pi - 100 < 0$

  $A\prime(10) = 20{\cdot}\pi - 0,01 > 0.$

  Resulta que tenim un màxim en $\mathrm{r}{=}\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ i $\mathrm{h}{=}\frac{1}{\pi\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}^2}$

4. *Volem construir un dipòsit en forma de prisme recta de base quadrada de 200 metres cúbics de volum. La superfície lateral es construïda amb un material que costa 90 Euros el metre quadrat i les dues bases amb un material que costa 70 Euros el metre quadrat. Quines seran les dimensions més econòmiques?*

   Demostració. La funció que volem minimitzar és

$$P = 70{\cdot}2{\cdot}x^2{+}90{\cdot}4{\cdot}xy$$

$$P = 140x^2{+}360{\cdot}x{\cdot}\mathrm{y}$$

Amb la condició $V = x^2 \cdot y = 200 \rightarrow y = \frac{200}{x^2}$ amb la qual cosa obtenim la funció

$$P = 140x^2 + 360 \cdot x \cdot \frac{200}{x^2}$$

$$P = 140x^2 + \frac{72000}{x}$$

i si derivem i igualem a 0:

- $P\prime = 280x - \frac{7200}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{280x^3 - 7200}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{40}$ i, com que

  P'(1)<0

  P'(5)>0

  Resulta que tenim un mínim en $x = \sqrt[3]{40}$ i $y = \frac{200}{(\sqrt[3]{40})^2}$.

5. *Troba el valor de k per tal que la funció $f(x) = x \cdot e^{kx}$ té un màxim en $x = 1$.*

   Demostració. Com que f presenta un màxim en $x = 1$ resulta que $f\prime(1) = 0$. Aleshores

$$f'(x) = 1 \cdot e^{kx} + xke^{kx}$$

   Aleshores,

$$f'(1) = 1 \cdot e^{k} + 1ke^{k1} = (1+k)e^{k} = 0$$

$$k = -1$$

6. Determina els valors de a, b, c per tal que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tingui un màxim en $x = -1$, un mínim en $x = 0$ i a més a més passi pel punt $(1, 1)$.

$$1 + a + b + c = 1$$

$$a + b + c = 0$$

   Demostració. Com que f passa pel punt $(1, 1)$ resulta que $f(1) = 1$. A més a més, com que f presenta extrems relatius en $x = -1$ i $x = 0$ resulta que

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

   i, per tant,

$$f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$$

$$f'(0) = b = 0$$

Aleshores,

$$a = \frac{3}{2}$$

$$c = -\frac{3}{2}$$