Solucions examen 4

1. *Representa gràficament*

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-9}$$

1. **Domini.**

   - $D = \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$.

2. **Punts de tall amb els eixos.**

   - Eix X: $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{y}=\frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} \\ \mathrm{y}=0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} = 0 \rightarrow \mathrm{x}^2+4 \neq 0$. Per tant no tenim punts de tall amb l'eix de les X.
   - Eix Y: $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{y}=\frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} \\ \mathrm{x}=0 \end{array} \right. \rightarrow \mathrm{y}=\frac{4}{-9}$ i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és $(0,-\frac{4}{9})$.

3. **Simetries.**

   - $\mathrm{f(-x)}=\frac{(-\mathrm{x})^2+4}{(-\mathrm{x})^2-9} = \frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} = \mathrm{f(x)}$. Per tant tenim simetria parell en y=f(x).

4. **Assímptotes.**

   - Verticals:
     - $\lim_{\mathrm{x}\to 3^+} \frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} = +\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\to 3^-} \frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} = -\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\to -3^+} \frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} = -\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\to -3^-} \frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} = +\infty$.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{\mathrm{x}\to \infty} \frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-9} = 1$.
   - Obliqües: no n' hi ha.

5. **Creixement i decreixement.**

   - $\mathrm{f'(x)}=\frac{2x(x^2-9)-2x(x^2+4)}{(x^2-9)^2} = \frac{-26x}{(x^2-9)^2}0 \rightarrow x = 0$ i, per tant, el domini quedarà dividit en $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ i si prenem un punt de cada interval tindrem $\mathrm{f'(-3)} > 0$, $\mathrm{f'(3)} < 0$ i, aleshores,

- f serà creixent en (-∞, 0).
- f serà decreixent en (0,+∞).

6. **Màxims i mínims relatius.**

- f presenta un màxim en $(0, -\frac{4}{9})$.

7. **Concavitat i convexitat.**

- f''(x)=$\frac{-26(x^2-4)^2+26x2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)(-26(x^2-4)+104x^2)}{(x^2-4)^4} = \frac{78x^2+104}{(x^2-4)^3} = 0$ que no tindrà cap solució i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R} =$ (-∞,-3) $\cup$ $(-3, 3)\cup$ $(3, +\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem:

  f''(-4)>0, f''(0)<0 i f''(5)>0 per tant trobem que

  - f cóncava en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.
  - f convexa en (-3, 3).

8. **Punts d'inflexió.**

- f no presenta cap punt d'inflexió.

9. **Taula de valors.**

x	y
0	$-\frac{4}{9}$

10. **Representació gràfica.**

2.- *Troba els valors d'a,b, c i d per tal que la funció* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *tingui un extrem relatiu en (0,2) i un punt d'inflexió en (2,4).*

En efecte, com que tenim un extrem relatiu en (0,2) resulta que f(0)=2 i f'(0)=0. D' altra banda, com que tenim un punt d' inflexió f(2)=4 i f''(2)=0.

$$f(0) = a0^3 + b0^2 + c0 + d = 2 \rightarrow d = 2$$

$$f'(0) = 3a0^2 + 2b0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$f(2) = a2^3 + b2^2 + 0{\cdot}2 + 2 = 4 \rightarrow \ 8a + 4b = 2$$

$$f''(2) = 6a2 + 2b = 0 \rightarrow 12a + 2b = 0$$

$$b = -6a$$

$$8a - 24a = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{8} \rightarrow b = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

3.- *Un rectangle té un perímetre de 6 metres. Substituïm un costat per una semi-circunferència exterior. Troba les dimensions del rectangle per tal que l'àrea de la figura així formada sigui el més gran possible.*

La funció que volem maximitzar és

$$A = x{\cdot}\mathrm{y} + \frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2$$

La relació que han de complir x i y és

$$2x + 2y = 6 \rightarrow y = 3 - x$$

amb la qual cosa

$$A = x\cdot\text{(3-x)}+\frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2$$

$$A = -x^2 + 3x + \frac{\pi}{8}x^2$$

$$A' = -2x + 3 + \frac{\pi}{4}x = 0 \rightarrow (-2 + \frac{\pi}{4})x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{-2 + \frac{\pi}{4}}$$

Aleshores com que

$$A'(1) > 0$$

$$A'(2) < 0$$

resulta que tenim un màxim en $x = \frac{-3}{-2+\frac{\pi}{4}}$ i, d' aquesta manera, $y = 3 - \frac{-3}{-2+\frac{\pi}{4}} = 3 + \frac{3}{-2+\frac{\pi}{4}}$