Solucions examen 4

1.- *Un terreny rectangular de 20 metres quadrats d'àrea es vol tancar. Els preus de la tanca són 4 Euros cada metre d'alçada i 6 per cada metre d'amplada. Calcula quines han d'ésser les dimensions més econòmiques d'aquest camp.*

Demostració. La funció que volem minimitzar és la funció

$$P = 4x + 4x + 6y + 6y$$

$$P = 8x + 12y$$

amb la relació que l' àrea és $xy = 20$. Aleshores

$$y = \frac{20}{x}$$

D' aquesta manera,

$$P = 8x + 12 \cdot \frac{20}{x}$$

$$P = 8x + \frac{240}{x}$$

essent $x > 0$.

Així,

$$P' = 8 - \frac{240}{x^2}$$

Aleshores,

$$8 - \frac{240}{x^2} = 0$$

$$\frac{8x^2 - 240}{x^2} = 0$$

$$8x^2 - 240 = 0$$

$$x = \sqrt{30}$$

Finalment, com que $P'(1) = 8 - \frac{240}{1^2} < 0$ i $P'(6) = 8 - \frac{240}{6^2} > 0$, amb la qual cosa $x = \sqrt{30}$ és un mínim de P i, per tant, $y = \frac{20}{\sqrt{30}}$.

2.- *Representa gràficament la funció*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 25}$$

Demostració.

1. **Domini.**
   - $D = \mathbb{R} \backslash \{\pm 5\}$.
2. **Punts de tall amb els eixos.**
   - $EixX: \begin{cases} \mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} \\ \mathrm{y}=0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} = 0 \rightarrow 1 \neq 0$. Per tant no tenim punts de tall amb l'eix de les X.
   - $EixY$: $\begin{cases} \mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} \\ \mathrm{x}=0 \end{cases} \rightarrow \mathrm{y} = \frac{-1}{25}$ i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és $(0, \frac{-1}{25})$.
3. **Simetries.**
   - $f(-x) = \frac{1}{(-\mathrm{x})^2-25} = \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} = f(x)$. Per tant tenim simetria parell en y=f(x).
4. **Assímptotes.**
   - Verticals:
     - $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow 5^+} \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} = +\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow 5^-} \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} = -\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow -5^+} \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} = -\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow -5^-} \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} = +\infty$.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathrm{x}^2-25} = 0$.
   - Obliqües: no n' hi ha.
5. **Creixement i decreixement.**
   - $f\prime(x) = \frac{-2x}{(x^2-25)^2} = 0 \rightarrow x = 0$ i, per tant, el domini quedarà dividit en (-$\infty, -5) \cup (-5, 0) \cup (0, 5) \cup (5, +\infty)$ i si prenem un punt de cada interval tindrem

     $f\prime(-7) > 0$, $f\prime(-1) > 0$, $f\prime(-1) < 0$, $f\prime(-7) < 0$ i, aleshores,
     - f és creixent en (-$\infty, 0)$.
     - f és decreixent en $(0, +\infty)$.

6. **Màxims i mínims relatius.**
   - f presenta un màxim en $(0, \frac{-1}{25})$.
7. **Concavitat i convexitat.**
   - $f_{\text{J}}(x) = \frac{-2(x^2-25)^2+2x2(x^2-25)2x}{(x^2-25)^4} = \frac{(x^2-25)(-2(x^2-25)+8x^2)}{(x^2-25)^4} = \frac{6x^2+50}{(x^2-25)^3} = 0$ que no tindrà cap solució i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R} = (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, +\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem:

     $f_{\text{J}}(-6)>0$, $f_{\text{J}}(0) < 0$ i $f_{\text{J}}(6)>0$ per tant trobem que
     - f cóncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
     - f convexa en $(-2, 2)$.
8. **Punts d'inflexió.**
   - f no presenta cap punt d'inflexió.
9. **Taula de valors.**

x	y
0	$\frac{-1}{25}$

10. **Representació gràfica.**

1. • *3.- El cost de fabricació de x milers de cotxes és* $f(x) = x^2 + 2x + 2500$ *. A partir d'aquí troba:*

   a) *La funció cost unitària.*

   b) *Quina quantitat de cotxes hem de fabricar per tenir un cost mínim?*

Demostració. a) $f(x) = \frac{x^2+2x+2500}{x}$

b)

$$f'(x) = \frac{(2x+2)x - 1(x^2+2x+2500)}{x^2} = \frac{x^2 - 2500}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - 2500}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 2500 = 0$$

$$x = 50$$