Representació gràfica de funcions

Sigui $y = f(x)$ una funció, ens plantegem, ara, representar-la gràficament. Els passos que hem de seguir per tal de poder-la dibuixar són:

1. Domini de la funció.

2. Estudiar la seva continuïtat.

3. Punts de tall amb els eixos$\rightarrow \begin{cases} Eix\ X \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=f(x) \end{cases} \\ Eix\ y \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=f(x) \end{cases} \end{cases}$

4. Simetries$\rightarrow \begin{cases} \text{Parell: } f(-x)=f(x) \\ \text{Senar: } f(-x)=-f(x) \end{cases}$

5. Assímptotes:

   - Verticals: Seran de la forma x=a i es produïran quan $lim_{x\rightarrow a}f(x) = \infty$.
   - Horitzontals: Seran de la forma y=b i es produïran quan $lim_{x\rightarrow\infty}f(x) = b$.
   - Obliqües: Seran de la forma $y = mx + n$ on $m = lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $n = lim_{x\rightarrow\infty}f(x) - mx$.

6. Creixement i decreixement ($f\prime(x) = 0$).

7. Màxims i mínims.

8. Concavitat i convexitat ($f\prime\prime(x) = 0$).

9. Punts d'inflexió.

10. Taula de valors: Punts de tall, màxims i mínims, punts d'inflexió...

11. Representació gràfica.

Exemple 1. *Representa gràficament f(x)=*$x^4 - 5x^2 + 4$.

1. **Domini.**

- El domini d'aquesta funció són tots els nombres reals ja que aquesta funció és un polinomi.

2. **Continuïtat**.

- Com tot polinomi aquesta funció és contínua sempre.

3. **Punts de tall amb els eixos.**

- Eix X: $\left\{\begin{array}{c} \text{y=x}^4\text{-5x}^2\text{+4} \\ \text{y=0} \end{array}\right. \rightarrow \text{x}^4-5\text{x}^2+4 = 0 \rightarrow \text{t}^2\text{-5t+4=0}\rightarrow \text{t=}\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \left\{\begin{array}{l} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{array}\right.$ i aleshores les solucions són (2,0), (-2,0), (1,0), (-1,0).

- Eix Y: $\left\{\begin{array}{c} \text{y=x}^4\text{-5x}^2\text{+4} \\ \text{x=0} \end{array}\right. \rightarrow$ y=4 i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és (0,4).

4. **Simetries.**

- $f(-x) = (-x)^4-5(-x)^2+4 = x^4-5x^2+4 = f(x)$. Per tant la simetria és parell.

5. **Assímptotes.**

   Les funcions polinòmiques no tenen assímptotes i per tant no té sentit buscar les assímptotes d'aquesta funció.

6. **Creixement i decreixement.**

- $f\prime(x) = 4x^3 - 10x = 0 \rightarrow x(4x^2-10) = 0$, aleshores trobem tres possibilitats x=$\left\{\begin{array}{c} \text{x=0} \\ \text{x=}\sqrt{\frac{5}{2}} \\ \text{x=-}\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$ i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R}$=(-∞,-$\sqrt{\frac{5}{2}}$) ∪ (-$\sqrt{\frac{5}{2}}$, 0)∪(0,$\sqrt{\frac{5}{2}}$)∪($\sqrt{\frac{5}{2}}$, +∞) i seleccionant un punt de cada interval tindrem:
  $f\prime(-2) = -12 < 0$, f$\prime(-1) = 6$, $f\prime(-1) = -6$, $f\prime(2) = 12$, per tant, trobem que
  - f creixent en (-$\sqrt{\frac{5}{2}}$, 0)∪($\sqrt{\frac{5}{2}}$, +∞).
  - f decreixent (-∞,-$\sqrt{\frac{5}{2}}$)∪(0,$\sqrt{\frac{5}{2}}$).

7. **Màxims i mínims relatius.**

   - f presenta un màxim en el punt (0,4).
   - f presenta dos mínims en (-$\sqrt{\frac{5}{2}}$, -$\frac{9}{4}$) i ($\sqrt{\frac{5}{2}}$, -$\frac{9}{4}$).

8. **Concavitat i convexitat.**

   - $f''(x) = 12x^2 - 10 = 0 \rightarrow$ x=$\begin{cases} \text{x=}\sqrt{\frac{5}{6}} \\ \text{x=-}\sqrt{\frac{5}{6}} \end{cases}$ i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R}$=(-∞,-$\sqrt{\frac{5}{6}}$)$\cup$(-$\sqrt{\frac{5}{6}}$, $\sqrt{\frac{5}{6}}$)$\cup$($\sqrt{\frac{5}{6}}$, +∞) i seleccionant un punt de cada interva tindrem:

     $f''(-1) = 2 > 0$, $f''(0) = -10$, $f'(1) = 2$, per tant, trobem que

     – f cóncava en (-∞, $-\sqrt{\frac{5}{6}}$)$\cup$($\sqrt{\frac{5}{6}}$, +∞).

     – f convexa en (-$\sqrt{\frac{5}{6}}$,$\sqrt{\frac{5}{6}}$).

9. **Punts d'inflexió.**

   - f presenta dos punts d'inflexió l'un en (-$\sqrt{\frac{5}{6}}$, $\frac{19}{36}$) i l'altre en ($\sqrt{\frac{5}{6}}$, $\frac{19}{36}$).

10. **Taula de valors.**

x	y
2	0
-1	0
1	0
-1	0
$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$-\frac{9}{4}$
$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$-\frac{9}{4}$
0	4
$-\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\frac{19}{36}$
$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\frac{19}{36}$

11. **Representació gràfica.**

Exemple 2. Representa gràficament $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$.

1. **Domini.**
   - $D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.
2. **Continuïtat**.
   - Aquesta funció serà contínua sempre excepte potser en x=4.
     - $f(4)$ no existeix.
     - $\lim_{\mathrm{x}\to 4^+} \frac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{x-4}} = +\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\to 4^-} \frac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{x-4}} = -\infty$.
3. **Punts de tall amb els eixos.**
   - $EixX$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{y}=\frac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{x-4}} \\ \mathrm{y}=0 \end{array} \right. \to \frac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{x-4}} = 0 \to x = -1$. Per tant el punt de tall amb l'eix de les X és (-1,0).
   - $EixY$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{y}=\frac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{x-4}} \\ \mathrm{x}=0 \end{array} \right. \to y = \frac{-1}{4}$ i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és (0,$\frac{-1}{4}$).
4. **Simetries.**
   - $f(-x) = \frac{-\mathrm{x}+1}{-\mathrm{x}-4} \neq$f(x). Per tant no tenim cap mena de simetria.

5. **Assímptotes.**

   - Verticals:
     - $\lim_{x \to 4^+} \frac{x+1}{x-4} = +\infty$.
     - $\lim_{x \to 4^-} \frac{x+1}{x-4} = -\infty$.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-4} = 1$.
   - Obliqües: no n' hi ha.

6. **Creixement i decreixement.**

   - f'(x)=$\frac{(x-4)-(x+1)}{(x-4)^2} = \frac{-5}{(x-4)^2} < 0$ i per tant aquesta funció sempre serà decreixent.

7. **Màxims i mínims relatius.**

   - f no presenta cap màxims ni cap mínim.

8. **Concavitat i convexitat.**

   - $f''(x) = \frac{10(x-4)}{(x-4)^4} = \frac{10}{(x-4)^3}$ i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R}$=(-∞,4)$\cup(4, +\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem:
     $f''(0) = \frac{-10}{4}$<0, $f''(5) = 10 > 0$ per tant trobem que
     - f cóncava en $(4, +\infty)$.
     - f convexa en (-∞,4).

9. **Punts d'inflexió.**

   - f no presenta cap punt d'inflexió.

10. **Taula de valors.**

x	y
-1	0
0	$\frac{-1}{4}$

11. **Representació gràfica.**

Exemple 3. Representa gràficament $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

1. **Domini.**
   - $D = \mathbb{R} \backslash \{\pm 2\}$.
2. **Continuïtat**.
   - Aquesta funció serà contínua sempre excepte, pot ser, en $x = 2$ i $x = -2$. Comencem mirant que passa en $x = 2$:
     - $f(2)$ no existeix.
     - $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$.
     - $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$.

     Per tant, f presenta una discotinuïtat inevitable essencial en $x = 2$. Vegem que passa en $x = -2$:
     - $f(-2)$ no existeix.
     - $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$.
     - $\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$.

Per tant, f presenta una discotinuïtat inevitable essencial en $x=-2$.

3. **Punts de tall amb els eixos.**

   - $EixX$: $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{y}=\frac{1}{\mathrm{x}^2-4} \\ \mathrm{y}=0 \end{array}\right. \rightarrow \frac{1}{\mathrm{x}^2-4}=0 \rightarrow 1 \neq 0$. Per tant no tenim punts de tall amb l'eix de les X.
   - $EixY$: $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{y}=\frac{1}{\mathrm{x}^2-4} \\ \mathrm{x}=0 \end{array}\right. \rightarrow \mathrm{y}=\frac{-1}{4}$ i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és $(0,\frac{-1}{4})$.

4. **Simetries.**

   - $f(-x)=\frac{1}{(-\mathrm{x})^2-4}=\frac{1}{\mathrm{x}^2-4}=f(x)$. Per tant tenim simetria parell en y=f(x).

5. **Assímptotes.**

   - Verticals:
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow 2^+}\frac{1}{\mathrm{x}^2-4}=+\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow 2^-}\frac{1}{\mathrm{x}^2-4}=-\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow -2^+}\frac{1}{\mathrm{x}^2-4}=-\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow -2^-}\frac{1}{\mathrm{x}^2-4}=+\infty$.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow \infty}\frac{1}{\mathrm{x}^2-4}=0$.
   - Obliqües: no n' hi ha.

6. **Creixement i decreixement.**

   - $f\prime(x)=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0 \rightarrow x=0$ i, per tant, el domini quedarà dividit en $(\text{-}\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$ i si prenem un punt de cada interval tindrem
     $f\prime(-3)=\frac{6}{25}>0$, $f\prime(-1)=\frac{2}{9}>0$, $f\prime(-1)=\frac{-2}{9}<0$, $f\prime(-3)=\frac{-6}{25}<0$ i, aleshores,
     - f és creixent en $(\text{-}\infty,0)$.
     - f és decreixent en $(0,+\infty)$.

7. **Màxims i mínims relatius.**

- f presenta un màxim en $(0,\frac{-1}{4})$.

8. **Concavitat i convexitat.**

   - $f''(x) = \frac{-2(x^2-4)^2+2x2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)(-2(x^2-4)+8x^2)}{(x^2-4)^4} = \frac{6x^2+8}{(x^2-4)^3} = 0$ que no tindrà cap solució i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R} = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem:

     $f''(-3) = \frac{66}{125} > 0$, $f''(0) = \frac{8}{-64} < 0$ i $f''(3) = \frac{66}{125} > 0$ per tant trobem que

     - f còncava en $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.
     - f convexa en $(-2,2)$.

9. **Punts d'inflexió.**

   - f no presenta cap punt d'inflexió.

10. **Taula de valors.**

x	y
0	$\frac{-1}{4}$

11. **Representació gràfica.**

Exemple 4. Representa gràficament $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

1. **Domini.**
   - $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. **Continuïtat.**
   - Aquesta funció serà contínua sempre excepte potser en x=1.
     Comencem mirant que passa en x=1:
     - f(1) no existeix.
     - $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$.
     - $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

     Per tant f presenta una discotinuïtat inevitable essencial en x=1.
3. **Punts de tall amb els eixos.**
   - $EixX$: $\begin{cases} y=\frac{x^2}{x-1} \\ y=0 \end{cases} \to \frac{x^2}{x-1} = 0 \to$ x=0. Per tant l'únic punt de tall amb l'eix de les X serà (0,0).
   - $EixY$: $\begin{cases} y=\frac{x^2}{x-1} \\ x=0 \end{cases} \to$ y=0 i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és (0,0).
4. **Simetries.**
   - $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-1} = \frac{x^2}{-x-1} \neq f(x)$. Per tant no tenim simetria en $y = f(x)$.
5. **Assímptotes.**
   - Verticals:
     - $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$.
     - $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$.
   - Obliqües:
     - $m=\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1$.

- $n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$.

Per tant tindrem com assímptota obliqua en y=x+1.

6. **Creixement i decreixement.**

   - $f\prime(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\rightarrow x=\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$ i per tant el domini quedarà dividit en $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ i si prenem un punt de cada interval tindrem

     $f\prime(-3)=\frac{15}{16}>0$, $f\prime(0,5)<0$, $f'(1,5)<0$, $f\prime(3)=\frac{3}{4}>0$ i aleshores

     - f serà creixent en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.
     - f serà decreixent en (0,2).

7. **Màxims i mínims relatius.**

   - f presenta un màxim en $(0,0)$.
   - f presenta un mínim en $(2,4)$.

8. **Concavitat i convexitat.**

   - $f\jmath(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\cdot((2x-2)\cdot(x-1)-2(x^2-2x))}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}=0$ que no tindrà cap solució i per tant el domini queda dividit en D= $\mathbb{R}=$ $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem:

     $f\jmath(0)=\frac{2}{-1}<0$, $f\jmath(2)=2>0$ i per tant trobem que

     - f còncava en $(1,+\infty)$.
     - f convexa en $(-\infty,1)$.

9. **Punts d'inflexió.**

   - f no presenta cap punt d'inflexió.

10. **Taula de valors.**

x	y
0	0
2	4

11. **Representació gràfica.**

Exemple 5. Representa gràficament $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

1. **Domini.**
   - $D = \mathbb{R}$.
2. **Continuïtat**.
   - Aquesta funció serà contínua sempre ja que el seu domini són tots els nombres reals.
3. **Punts de tall amb els eixos.**
   - *EixX*: $\left\{ \begin{array}{c} y=\frac{1}{x^2+4} \\ y=0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{x^2+4} = 0 \rightarrow 1 \neq 0$. Per tant no tenim punts de tall amb l'eix de les X.
   - *EixY*: $\left\{ \begin{array}{c} y=\frac{1}{x^2+4} \\ x=0 \end{array} \right. \rightarrow y=\frac{1}{4}$ i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és $(0,\frac{1}{4})$.

4. **Simetries.**

   - $f(-x) = \frac{1}{(-\mathrm{x})^2+4} = \frac{1}{\mathrm{x}^2+4}$ =f(x). Per tant tenim simetria parell en y=f(x).

5. **Assímptotes.**

   - Verticals: No existeixen ja que el domini són tots els nombres reals.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{\mathrm{x}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{x}^2+4} = 0$.
   - Obliqües: no n' hi ha.

6. **Creixement i decreixement.**

   - $f\prime(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2} = 0 \to$ x=0 i per tant el domini quedarà dividit en (-∞,0) ∪ (0,+∞) i si prenem un punt de cada interval tindrem
     $f\prime(-3) = \frac{6}{25} > 0$, $f\prime(3) = \frac{-6}{25} < 0$ i, aleshores,
     - f serà creixent en (-∞, 0).
     - f serà decreixent en (0,+∞).

7. **Màxims i mínims relatius.**

   - f presenta un màxim en (0,$\frac{1}{4}$).

8. **Concavitat i convexitat.**

   - $f\jmath(x) = \frac{-2(\mathrm{x}^2+4)^2+2x2(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4} = \frac{(\mathrm{x}^2+4)(-2(x^2+4)+8x^2)}{(x^2+4)^4} = \frac{6\mathrm{x}^2-8}{(x^2+4)^3} = 0 \to \begin{cases} \mathrm{x}=\sqrt{\frac{4}{3}} \\ \mathrm{x}=-\sqrt{\frac{4}{3}} \end{cases}$ i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R} =$ (-∞,-$\sqrt{\frac{4}{3}}$) ∪ ($-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}$)∪ ($\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty$) i seleccionant un punt de cada interval tindrem:
     $f\jmath(-3) = \frac{46}{125} > 0$, $f\jmath(0) = \frac{-8}{64}$<0 i $f\jmath(3) = \frac{46}{125}$>0 per tant trobem que
     - f cóncava en $(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty)$.
     - f convexa en (-$\sqrt{\frac{4}{3}}$, $\sqrt{\frac{4}{3}}$).

9. **Punts d'inflexió.**

- f presenta dos punts d'inflexió en $(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{3}{7})$ i $(\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{3}{7})$

10. **Taula de valors.**

x	y
0	$\frac{1}{4}$
$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\frac{3}{7}$
$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\frac{3}{7}$

11. **Representació gràfica.**

Exemple 6. Representa gràficament $f(x) = x{\cdot}e^{x}$.

1. **Domini.**

   - $D = \mathbb{R}$.

2. **Continuïtat**.

   - Aquesta funció serà contínua sempre ja que el seu domini són tots els nombres reals.

3. **Punts de tall amb els eixos.**

   - Eix X: $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{y}=x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{x}} \\ \mathrm{y}=0 \end{array}\right. \rightarrow \mathrm{x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=0 \rightarrow \mathrm{x}=0$. Per tant l'únic punt de tall amb l'eix de les X serà (0,0).
   - Eix Y: $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{y}=x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{x}} \\ \mathrm{x}=0 \end{array}\right. \rightarrow \mathrm{y}=0$ i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és (0,0).

4. **Simetries.**

   - $\mathrm{f}(-x)=-x\cdot e^{\text{-x}} \neq x\cdot e^{\mathrm{x}}=f(x)$. Per tant, no tenim simetries.

5. **Assímptotes.**

   - Verticals: No existeixen ja que el domini són tots els nombres reals.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow+\infty} \mathrm{x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=+\infty$.
     - $\lim_{\mathrm{x}\rightarrow-\infty} \mathrm{x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=0$.
   - Obliqües: no n' hi ha.

6. **Creixement i decreixement.**

   - $\mathrm{f'(x)=e^x+x\cdot e^x=e^x\cdot(1+x)=0} \rightarrow \mathrm{x}=-1$ i per tant el domini quedarà dividit en $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$ i si prenem un punt de cada interval tindrem $\mathrm{f'(-3)}=-2\cdot\mathrm{e}^{-3}<0$, $\mathrm{f'(3)}=4\cdot\mathrm{e}^{3}>0$ i aleshores
     - f serà decreixent en $(-\infty,-1)$.
     - f serà creixent en $(-1,+\infty)$.

7. **Màxims i mínims relatius.**

   - f presenta un mínim en $(-1,-\mathrm{e}^{-1})$.

8. **Concavitat i convexitat.**

   - $f''(x)=2e^x+x\cdot e^{\mathrm{x}}=0 \rightarrow \mathrm{e^x(2+x)}=0 \rightarrow \mathrm{x}=-2$ i per tant el domini queda dividit en $D=\mathbb{R}=(-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$ i seleccionant un punt de cada interval tindrem:
     $f''(-3)=-e^{-3}<0$, $f''(0)=2>0$ i, per tant, trobem que

- f és convexa en $(-2, +\infty)$.
- f és cóncava en (-∞, -2).

9. **Punts d'inflexió.**

   - f presenta un punt d'inflexió en (-2, $-2\mathrm{e}^{-2}$).

10. **Taula de valors.**

x	y
0	0
-1	$-\mathrm{e}^{-1}$
-2	e^{-2}

11. **Représentació gràfica.**

Exemple 7. Representa gràficament $\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{x}^2+4}{\mathrm{x}^2-4}$.

1. **Domini.**

   - $D = \mathbb{R} \backslash \{\pm 2\}$.

2. **Continuïtat.**

   - Aquesta funció serà contínua sempre excepte potser en $x = 2$ i $x = -2$. Comencem mirant que passa en x=2:
     - f(2) no existeix.
     - $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4} = +\infty$.
     - $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = -\infty$.

     Per tant f presenta una discotinuïtat inevitable essencial en x=2.

     Vegem que passa en x=-2:
     - f(-2) no existeix.
     - $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4} = -\infty$.
     - $\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = +\infty$.

     Per tant f presenta una discotinuïtat inevitable essencial en x=-2.

3. **Punts de tall amb els eixos.**

   - Eix X: $\begin{cases} y=\frac{x^2+4}{x^2-4} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \frac{x^2+4}{x^2-4} = 0 \rightarrow x^2 + 4 \neq 0$. Per tant no tenim punts de tall amb l'eix de les X.
   - Eix Y: $\begin{cases} y=\frac{x^2+4}{x^2-4} \\ x=0 \end{cases} \rightarrow y=\frac{-4}{4}$ i per tant el punt de tall amb l'Eix de les Y és $(0,-1)$.

4. **Simetries.**

   - $f(-x)=\frac{(-x)^2+4}{(-x)^2-4} = \frac{x^2+4}{x^2-4} = f(x)$. Per tant tenim simetria parell en y=f(x).

5. **Assímptotes.**

   - Verticals:
     - $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4} = +\infty$.
     - $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = -\infty$.
     - $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4} = -\infty$.
     - $\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = +\infty$.
   - Horitzontals:
     - $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+4}{x^2-4} = 1$.

- Obliqües: no n' hi ha.

6. **Creixement i decreixement.**

- f'(x)=$\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+4)}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}0 \to$ x=0 i per tant el domini quedarà dividit en (-∞,0) ∪ (0,+∞) i si prenem un punt de cada interval tindrem f'(-3)=$\frac{48}{25} > 0$, f'(3)=$\frac{-48}{25} < 0$ i, aleshores,
  - f serà creixent en (-∞, 0).
  - f serà decreixent en (0,+∞).

7. **Màxims i mínims relatius.**

- f presenta un màxim en (0,−1).

8. **Concavitat i convexitat.**

- f''(x)=$\frac{-16(x^2-4)^2+16x2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)(-16(x^2-4)+64x^2)}{(x^2-4)^4} = \frac{48x^2+64}{(x^2-4)^3} = 0$ que no tindrà cap solució i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R}$ = (-∞,-2) ∪ $(-2, 2)$∪ $(2, +\infty)$ i seleccionant un punt de cada interva tindrem: f''(-3)=$\frac{496}{125}$>0, f''(0)=-1<0 i f''(3)=$\frac{496}{125}$>0 per tant trobem que
  - f còncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
  - f convexa en (-2, 2).

9. **Punts d'inflexió.**

- f no presenta cap punt d'inflexió.

10. **Taula de valors.**

x	y
0	−1

11. **Representació gràfica.**