Problemes de màxims i mínims

Exercici 1. *Troba les dimensions d'un pot cilíndric d' 1 litre de material per tal que pugui construir-se amb la menor quantitat possible de material.*

- Siguin r i h el radi i l'alçada d'aquest cilindre aleshores la funció que voldrem optimitzar serà
$$A=\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h$$
amb la condició que el volum ha d'ésser 1 litre i per tant $\pi\cdot r^2\cdot h=1\rightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}$ amb la qual cosa la funció que voldrem fer màxima o mínims serà
$$A=\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{1}{\pi r^2}=\pi\cdot r^2+\frac{2}{r}$$
I com que les dimensions han d'ésser positives $D=\mathbb{R}^+$

  Si la derivem i la igualem a 0 tindrem

  $A'=2\cdot\pi\cdot r-\frac{1}{r^2}=0\rightarrow 2\cdot\pi\cdot r^3-1=0\rightarrow r^3=\frac{1}{2\pi}\rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$, com que

  $A'(0,1)=2\cdot\pi-100<0$

  $A'(10)=20\cdot\pi-0,01>0$.

  Així entre $(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}})$ la funció serà decreixent mentre que en $(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}},+\infty)$ la funció serà creixent i per tant la funció presentarà un mínim en $r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$, $h=\frac{8}{\pi\cdot(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}})^2}$ i $A=\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}^2+2\cdot\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\cdot\frac{1}{\pi\cdot(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}})^2}=\pi\cdot(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}})^2+\frac{2}{(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}})}$.

Exercici 2. *Trobeu la distància mínima dels punts de la paràbola $y=\sqrt{6x}$ al punt (5,0). Quins són aquests punts?*

- Un punt de la corba $y=\sqrt{6x}$ és de la forma $(x,y)=(x,\sqrt{6x})$ i per tant la funció distància d'un punt $(x,\sqrt{6x})$ al punt (5,0) és
$$d=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{6x})^2}$$
Si la derivem i la igualem a 0 tindrem

  $d'=\frac{1}{2\sqrt{(x-5)^2+6x}}\cdot(2\cdot(x-5)+6)=0\rightarrow(2x-4)=0\rightarrow x=2$ com que:

d'(0)=$\frac{-4}{10} < 0$.

d'(3)=$\frac{2}{6} > 0$.

Així entre (-$\infty, 2$) la funció és decreixent mentre que $(2, +\infty)$ la funció és creixent.

Per tant la funció presentarà un mínim en (2,$\sqrt{21}$).

Exercici 3. *L'àrea d'un prisme recta de base quadrada tancada és de 12 metres quadrats. Troba quin ha d'ésser el seu volum màxim.*

- Siguin x el costat de la base i y l'alçadad d'aquest prisme la funció que volem optimitzar en aquest cas és
$$V = x^2 \cdot y$$
amb la relació 2x^2+4xy= 12 $\rightarrow y = \frac{12-2x^2}{4x}$ que té per domini D=R$^+$ i substituint-la en la funció que es preten optimitzar tindrem $V = x^2 \cdot \frac{12\text{-}2x^2}{4x} \rightarrow$ V=$\frac{12x\text{-}2x^3}{4} = \frac{1}{4}\cdot$(12x-2x^3) i si derivem i igualem a 0:

  V'=$\frac{1}{4}\cdot$(12-6x^2) $= 0 \rightarrow$ x=$\pm\sqrt{2}$ i com que

  v'(1)=$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 0$.

  v'(2)=-3<0.

  Per tant la funció és creixent de (0,$\sqrt{2}$) i decreixent ($\sqrt{2}, +\infty$), tenim doncs un màxim en x=$\sqrt{2}$ i y=1 i el seu valor serà V=4 metres quadrats.

Exercici 4. *Volem construir una caixa amb un quadrat de dimensions 50 metres de costat retallant les puntes amb quadrats. Troba com hem de retallar els quadrats per tenir un cub de volum màxim.*

- Sigui x la longitud del costat retallat aleshores V=(50-2x)$^2\cdot$x i per tant

  V'(x)=2$\cdot$(50-2x)$\cdot$(-2)$\cdot$x+(50-2x)^2=0$\rightarrow$ (50-2x)$\cdot$(-4x+50-2x)=25$\rightarrow$ x=25 i x=$\frac{50}{8}$, com que:

  v'(1)>0.

  v'(7)<0.

  v'(30)>0

  Per tant aquesta funció sempre serà creixent (0,$\frac{50}{8}$) $\cup$ $(25, +\infty)$ i decreixent de ($\frac{50}{8}$, 25) i tindrem un màxim en $\frac{50}{8}$.