Exercicis d' extrems relatius amb paràmetres

Exercici 1. *Troba el valor de m per tal que la funció $f(x) = x^3 - 2mx + 4$ presenti un extrem relatiu en el punt $x = 2$. Es tracte d'un màxim o d'un mínim?*

- *Resolució.* Els extrems relatius d'aquesta funció seran en els punts on la seva derivada val 0 i, per tant,

$$f\prime(x) = 3x^2 - 2m$$

$$f\prime(2) = 3{\cdot}2^2 - 2{\cdot}m = 0$$

$$12 - 2m = 0$$

$$m = 6$$

Per veure si es tracte d' un màxim o bé d' un mínim anem a estudiar la monotonia de la funció $f(x) = x^3 - 12x + 4$.

$$\prime(x) = 3{\cdot}x^2 - 12 = 0$$

$$x = \pm 2$$

i, per tant,

$f\prime(-3) = 15 > 0.$

$f\prime(0) = -12 < 0.$

$f\prime(3) = 15 > 0.$

Així, doncs, f és creixent en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ mentre que és decreixent de $(-2, 2)$. D' aquesta manera f presenta un mínim en $x = 2$.

Exercici 2. *Troba els valors de a i b per tal que la funció $f(x) = ax^3 + bx + 2$ presenti un extrem relatiu en el punt $(2, 1)$.*

- *Resolució.* En aquest cas ens estan donant dues condicions, per una banda ens diuen que la funció en el punt $x = 2$ val 1 i per tant

$$8a + 2b + 2 = 1$$

i, per altra banda, com que f ha de tenir un extrem relatiu en el punt $x = 2$ la seva derivada en aquest punt haurà d'ésser 0, i per tant

$$12a + b = 0$$

Així, doncs,

$$\begin{cases} 8a + 2b = -1 \\ 12a + b = 0 \end{cases}$$

i la seva resolució és $b = -12a \rightarrow 8a - 24a = -1 \rightarrow -16a = -1 \rightarrow a = \frac{1}{16}$ mentre que $b = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}$.

D' aquesta manera,

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x + 2$$

Exercici 3. *Troba els valors d'a i c per tal que la funció* $f(x) = ax^3+2x^2-3cx+2$ *presenti dos extrems relatius en els punts* $x = 1$ *i* $x = -2$.

- *Resolució*. Comencem buscant la derivada de $f(x)$,

$$f\prime(x) = 3ax^2 + 4x - 3c$$

i la igualem, en els punts on tenim l'extrem relatiu, a 0. El sistema que tindrem serà,

$$\begin{cases} 3a + 4 - 3c = 0 \\ 12a - 4 - 3c = 0 \end{cases}$$

que dona el sistema

$$\begin{cases} 3a - 3c = -4 \\ 12a - 3c = 4 \end{cases}$$

i la seva resolució seria $\frac{3a+4}{3} = \frac{12a-4}{3} \rightarrow -9a = -8 \rightarrow a = \frac{8}{9}$ i per tant c=$\frac{3\cdot\frac{8}{9}+4}{3} = \frac{60}{27} = \frac{20}{9}$.

Així, doncs, la funció que tindrem serà

$$f(x) = \frac{8}{9}x^3 + 2x^2 - \frac{20}{3}x + 2$$

Exercici 4. *Troba la funció* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *que presenta dos extrems relatius en els punts* $(0, 1)$ *i* $(1, 2)$.

- *Resolució*. En aquest cas imposem d'entrada que la funció passi pels punts que ens diuen

$$\begin{cases} \text{d} = 0 \\ \text{a+b+c+d=2} \end{cases}$$

I també que la derivada de la funció sigui 0 en les abscisses indicades

$$\begin{cases} \text{c} = 0 \\ \text{3a+2b+c=0} \end{cases}$$

Aleshores, en realitat, el sistema que surt és:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=2-b \\ 3a+2b=0 \end{cases}$$

$$\to 6-3b+2b=0 \to b=6 \to a=-4.$$

I ,d'aquesta manera,

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

Exercici 5. *Troba el valor d' a per tal que la funció $f(x) = ax^3 - 5x^2 - 2x + 3$ tingui un sol extrem relatiu. Es tracte d'un màxim o bé d'un mínim?*

- *Resolució.* El domini d'aquesta funció són tots els nombres reals i per tant anem a calcular la derivada i igualar-la a 0,

$$f\prime(x) = 3ax^2 - 10x - 2 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{\text{100+24a}}}{6a}$$

i per tal de tenir una sola solució el discriminant de l'equació ha d'ésser 0. Així, doncs, $100 + 24a = 0 \to a = \frac{-100}{24} = \frac{-25}{6}$.

Per tant la funció que en principi tindrà un sol extrem relatiu de la família de funcions donades serà,

$$f(x) = \frac{\text{-25}}{6}x^3\text{-}5x^2\text{-}2x + 3$$

Però si ara busquem el seu creixement i el seu decreixement obtindrem

$f\prime(x) = \frac{\text{-75}}{6}x^2 - 10x - 2 = 0 \to$ .x=$\frac{10\pm\sqrt{100+24(\frac{-25}{6})}}{-25} = \frac{\text{-10}}{25} = \frac{-2}{5}$, per tant:

$f\prime(0) = -2 < 0.$

$f\prime(-1) = \frac{\text{-75}}{6} + 10 - 2 > 0.$

I no tindrem cap extrem relatiu en $x = \frac{-2}{5}$. **D'aquesta manera no existeix cap valor d'a pel qual f(x) tingui un sol extrem relatiu.**