Equacions de segon grau

- $3x^2 - 75=0$

  $3x^2 = 75$

  $x^2 = \frac{75}{3} = 25$

  $x=\pm 5.$

- $5x^2 - 8x= 0.$

  $x\cdot(5x.8)=0\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ 5x\text{-}8=0 \rightarrow \ x=\frac{8}{5} \end{array} \right. .$

- $(2x\text{-}3)^2 = 81$

  $2x\text{-}3=\pm\sqrt{81}$

  $2x\text{-}3=\pm 9$

  $2x=3\pm 9\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=\frac{3+9}{2} = 6 \\ x=\frac{3\text{-}9}{2} = -3 \end{array} \right.$

- $(3x\text{-}2)\cdot(4x\text{-}8)=0$

  En aquest cas tenim el producte de dues expressions igualat a 0 i per tant un dels dos haurà d'ésser seran $\left\{ \begin{array}{c} 3x - 2 = 0 \rightarrow \ x=\frac{3}{2} \\ 4x\text{-}8=0 \rightarrow \ 4x=8 \rightarrow \ x=2 \end{array} \right. .$

- $9x^2+8x\text{-}1= 0 \rightarrow x=\frac{\text{-}8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 9\cdot(\text{-}1)}}{2\cdot 9} = \frac{\text{-}8\pm\sqrt{100}}{18} = \frac{\text{-}8\pm 10}{18} = \left\{ \begin{array}{c} x=\frac{1}{9} \\ x=-1 \end{array} \right. .$

- $(x+2)^2 + (2x\text{-}1)^2 =10$

  $x^2+2\cdot x\cdot 2+4+(2x)^2 - 2\cdot 2\cdot x+1 =10$

  $x^2+4x+4+4x^2-4x+1=10$

  $5x^2 + 5 = 10$

  $5x^2 =5$

  $x^2 = 1$

  $x=\pm 1.$

- $\frac{x^2+3x\text{-}2}{5} + \frac{4x\text{-}2}{2} = 3$

  $\frac{x^2+3x-2+8x-10}{10} = \frac{30}{10}$

  $x^2+11x\text{-}42=0\rightarrow x=\frac{\text{-}11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 1\cdot(\text{-}42)}}{2\cdot 1} = \frac{\text{-}11\pm\sqrt{289}}{2} = \frac{\text{-}11\pm 17}{18} = \left\{ \begin{array}{c} x=\frac{6}{18} = \frac{1}{3} \\ x=\frac{-28}{18} = \frac{-14}{9} \end{array} \right. .$

- $\frac{x+3}{5}$-$\frac{3x^2+2}{7}$ = 2x-1

  $\frac{7x+21-15x^2-10}{35} = \frac{70x-35}{35}$

  $7x+21-15x^2-10 = 70x-35$

  $-15x^2-63x+56=0$

  $x=\frac{63\pm\sqrt{(-63)^2-4\cdot(-15)\cdot(56)}}{-30} = \frac{63\pm\sqrt{7359}}{-30} = \begin{cases} x=\frac{63+\sqrt{7359}}{-30} \\ x=\frac{63-\sqrt{7359}}{-30} \end{cases}$

- $(x^2+3x-2)\cdot(2x^2-18)=0$

  En aquest cas tenim el producte de dues expressions igualats a zero i per tant una de les dues expressions seran:

  $x^2+3x-2=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} = \frac{-3\pm\sqrt{18}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{18}}{2} = \begin{cases} x=\frac{-3+\sqrt{18}}{2} \\ x=\frac{-3-\sqrt{18}}{2} \end{cases}$.

  $2x^2-18=0 \rightarrow 2x^2=18 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm3.$

Equacions polinòmiques

- $x^4-9x^3+29x^2-39x+18=0$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -9 & 29 & -39 & 18 \\ 1 & & 1 & -8 & 21 & -18 \\ \hline & 1 & -8 & 21 & -18 & 0 \\ 2 & & 2 & -12 & 18 & \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 & \\ 3 & & 3 & -9 & & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & & \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

Aleshores, $x^4-9x^3+29x^2-39x+18 = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)^2 = 0$ i les solucions són x=1, x=2 i x=3.

- $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & -3 & 17 & -10 \\ 1 & & 1 & -4 & -7 & 10 \\ \hline & 1 & -4 & -7 & 10 & 0 \\ 1 & & 1 & -3 & -10 & \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 & \\ -2 & & -2 & 10 & & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & & \\ 5 & & 5 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

Aleshores, $p(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10 = (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-5)$ i les solucions són x=1, x=-2 i x=5.

Equacions biquadrades

- $x^4 + x^2 - 2 = 0$

  Fem el canvi de variable $t = x^2$ i aleshores l'equació que sortirà serà:

  $t^2+t-2=0 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} = \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$ i desfent el canvi de variables obtindrem $\begin{cases} x=\pm\sqrt{1}=\pm1 \\ x=\pm\sqrt{-2} \text{ no possible} \end{cases}$.

- $-x^4 + 3x^2 + 4 = 0$

  Fem el canvi de variable $t = x^2$ i aleshores l'equació que sortirà serà:

  $-t^2 + 3t+4=0 \rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot(4)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{-2} = \frac{-3\pm5}{-2} = \begin{cases} t=1 \\ t=4 \end{cases}$ i desfent el canvi de variables obtindrem $\begin{cases} x=\pm\sqrt{1}=\pm1 \\ x=\pm\sqrt{4}=\pm2 \end{cases}$.

- $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$

  Fem el canvi de variable $t = x^2$ i aleshores l'equació que sortirà serà:

  $2t^2 + 3t+1=0 \rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot(2)\cdot(1)}}{2\cdot(2)} = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{4} = \frac{-3\pm1}{4} = \begin{cases} t=\frac{-1}{2} \\ t=-1 \end{cases}$ i desfent el canvi de variables obtindrem $\begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{-1}{2}} \text{ no possible} \\ x=\pm\sqrt{-1} \text{ no possible} \end{cases}$.

Equacions irracionals

- $\sqrt{x+3} + 4 = 6x$.

  $\sqrt{x+3} = 6x-4$ i elevant al quadrat a cada banda tindrem:

  $(\sqrt{x+3})^2 = (6x-4)^2$

  $x+3=36x^2 - 48x+16$

  $-36x^2+49x-13=0 \rightarrow x=\frac{-49\pm\sqrt{49^2-4\cdot(-36)\cdot(-13)}}{2\cdot(-36)} = \frac{-49\pm\sqrt{529}}{-72} = \frac{-49\pm 23}{-72} =$

  $\begin{cases} x=\frac{-26}{72} = \frac{-13}{36} \\ x=1 \end{cases}$ i cal comprovar les solucions d'aquesta equació:

  - $\sqrt{1+3} + 4 = 6\cdot 1 \rightarrow 2+4=6 \rightarrow 6=6$. Pre tant x=1 és solució.
  - $\sqrt{\frac{-13}{36}+3} + 4 = 6(\frac{-13}{36}) \rightarrow$ No és solució.

- $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 1$.

  $\sqrt{x+3} = -\sqrt{x-2} + 1$ i elevant al quadrat a cada banda tindrem:

  $(\sqrt{x+3})^2 = (1 - \sqrt{x-2})^2$

  $x+3=1-2\sqrt{x-2}+x-2$

  $2\sqrt{x-2} = -4$ tornant a elevar al quadradat a cada banda

  $(2\sqrt{x-2})^2 = 16$

  $2(x-2)=16 \rightarrow 2x=12 \rightarrow x=\frac{12}{2} = 6$. i cal comprovar les solucions d'aquesta equació:

  - $\sqrt{6+3} + \sqrt{6-2} = 3 - 2 = 1$.

Equacions racionals

- $\frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x-2}{x+1}$

  El $\text{mcm}(x^2 - 1, x-1, x+1) = x^2 - 1$. Així, doncs,

  $\frac{x+1}{x^2-1} - \frac{(2x+3)(x+1)}{x^2-1} = \frac{(4x-2)(x-1)}{x^2-1} \rightarrow x + 1 - (2x + 3)(x + 1) = (4x - 2)(x - 1)$ $\rightarrow -6x^2 + 2x - 5 = 0 \rightarrow -6x^2+2x-5=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-6)\cdot(-5)}}{2\cdot(-6)} = \frac{-2\pm\sqrt{-104}}{-12}$ que no té solució.

- $\frac{2x+4}{x^2-1}+\frac{3x-2}{x+1}=\frac{4x-5}{x-1}$
  El mcm($\mathrm{x}^2-1,x-1,x+1)=x^2-1$. Així, doncs,
  $\frac{2x+4}{x^2-1}+\frac{3x-2}{x+1}=\frac{4x-5}{x-1}\rightarrow\frac{2x+4}{x^2-1}+\frac{3x-2}{x+1}=\frac{4x-5}{x-1}\rightarrow\frac{2x+4+(3x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(4x-5)(x+1)}{(x-1)(x+1)}\rightarrow$ $-x^2-2x+11=0\rightarrow$ x=$\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot(-1)\cdot(11)}}{-2}=\frac{-2\pm\sqrt{48}}{-2}$.

- $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x+3}=3$
  El mcm$(x-2,x+3)=(x-2)(x+3)$. Així, doncs,
  $\frac{(x+1)(x+3)-(3x-2)(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{2(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)}\rightarrow -4\mathrm{x}^2+10x+19=0\rightarrow$
  $x=\frac{-10\pm\sqrt{100-4\cdot(-4)\cdot(19)}}{-8}=\frac{-10\pm\sqrt{404}}{-8}$.

- $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{24}$
  El mcm$(x-1,x+1)=(x-1)(x+1)$. Així, doncs,
  $\frac{24(x+1)-24(x-1)}{24(x-2)(x+3)}=\frac{(x-1)(x+1)}{24(x-1)(x+1)}\rightarrow 24(x+1)-24(x-1)=(x-1)(x+1)\rightarrow$ $48=\mathrm{x}^2-1\rightarrow\mathrm{x}^2=49\rightarrow\mathrm{x}=\pm\sqrt{49}=\pm7$.

- $\frac{x^2-x-1}{x+2}=2x+3$
  $\frac{x^2-x-1}{x+2}=\frac{(2x+3)(x+2)}{x+2}\rightarrow x^2-x-1=2x^2+7x+6\rightarrow -\mathrm{x}^2-8x-7=0\rightarrow$
  $x=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-7)\cdot1}}{-2}=\frac{8\pm\sqrt{92}}{-2}$.

- $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{7}{12}$
  El mcm$(x-1,x-2)=(x-1)(x-2)$. Així, doncs,
  $\frac{12(x-2)+12(x-1)}{12(x-2)(x-1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{12(x-1)(x-2)}\rightarrow 12(x-2)+12(x-1)=7(x-1)(x-2)\rightarrow$
  $-7\mathrm{x}^2+45x-50=0\rightarrow x=\frac{-45\pm25}{-14}=\begin{cases} x=\frac{20}{14}=\frac{10}{7} \\ x=5\end{cases}$.