Concavitat i convexitat d'una funció.

Definició. Sigui $y = f(x)$ una funció derivable en un interval (b, c). Direm que la funció és concava en un punt $x = a$ si exiteix un interval $(b\prime, c\prime)$ que conté a tal que la recta tangent en el punt $x = a$ és menor que la funció per qualsevol punt pertanyen en aquest interval.

Definició. Sigui $y = f(x)$ una funció derivable en un interval (b, c). Direm que la funció és convexa en un punt $x = a$ si exiteix un interval $(b\prime, c\prime)$ que conté a tal que la recta tangent en el punt $x = a$ és major que la funció per qualsevol punt pertanyen en aquest interval.

Definició. Sigui $y = f(x)$ una funció derivable en un interval (b, c). Direm que la funció presenta un punt d'inflexió en $x = a$ si la funció en aquest punt canvia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

Teorema.

(i) *Sigui $y = f(x)$ una funció contínua i derivable aleshores $f'' > 0$ al voltant d'un punt $x = a$ si i només si f serà concava al voltant del punt $x = a$.*

(ii) *Sigui $y = f(x)$ una funció contínua i derivable aleshores $f'' < 0$ al voltant d'un punt $x = a$ si i només si f és convexa al voltant del punt $x = a$.*

(iii) *Sigui $y = f(x)$ una funció contínua i derivable aleshores $f''(a) = 0$ aleshores f pot presentar un punt d' inflexió en $x = a$.*

Exemple 1. Troba la concavitat i convexitat de la funció $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

- El domini d'aquesta funció són tots els nombres reals ja que és un polinomi per tant igualarem la segona derivada a 0:

  $f\prime(x) = 3x^2 + 6x - 2$ i $f''(x) = 6x + 6 = 0 \to x = -1$. Això permet separar el domini en dos intervals (-$\infty, -1)$ i $(-1, +\infty)$ amb la qual cosa donarem un valor de cada interval i el substituirem en la segona derivada si és positiva serà concava mentre que si es negativa serà convexa.

  $f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -6 < 0$.

  $f''(2) = 6 \cdot 2 + 6 = 18 > 0$.

  Per tant, f serà convexa entre $(-\infty, -1)$ mentre que serà cóncava en $(-1, +\infty)$ a més a més f presentarà un punt d'inflexió en el punt $(-1, 7)$.

Exemple 2. Troba la concavitat i convexitat de la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

- El domini d'aquesta funció és $D = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, si ara fem la segona derivada d'aquesta funció tindrem:
  $f\prime(x) = \frac{-2\text{x}}{(x^2-1)^2} \longrightarrow f\text{J}(x) = \frac{-2(x^2-1)^2-2\cdot(x^2-1)\cdot 2x(-2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1)+8x}{(x^2-1)^3} = \frac{6\text{x}^2+2}{(x^2-1)^3} = 0 \longrightarrow 6x^2+2=0$ i aquesta equació no té solució. Per tant si dividim la recta real tenint en compte el domini tindrem $\mathbb{R} = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

  $f\text{J}(-2) = \frac{6\cdot(\text{-}2)^2+2}{((-2)^2-1)^3} = \frac{26}{27} > 0$.

  $f\text{J}(0) = \frac{2}{-1} = -2 < 0$.

  $f\text{J}(2) = \frac{6\cdot 2^2+2}{(2^2-1)^3} = \frac{26}{27} > 0$.

  Per tant f serà cóncava en $(\text{-}\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ i convexa de $(-1,1)$ però no tindrem punts d'inflexió ni en $x=1$ ni en $x=-1$ ja que són punts que no són del domini.

Exemple 3. Troba la concavitat i convexitat de la funció $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

- El domini d'aquesta funció són tots els nombres reals, si ara fem la segona derivada d'aquesta funció tindrem:
  $f\prime(x) = \frac{-2\text{x}}{(x^2+1)^2} \longrightarrow f\text{J}(x) = \frac{-2(x^2+1)^2-2\cdot(x^2+1)\cdot 2\text{x}(\text{-}2\text{x})}{(x^2+1)^4} = \frac{\text{-}2(\text{x}^2+1)+8x}{(x^2+1)^3} = \frac{6\text{x}^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \longrightarrow 6\text{x}^2-2=0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ i la recta real queda dividida de la forma $\mathbb{R} = (-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})\cup(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}})\cup(\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty)$

  $f\text{J}(-2) = \frac{6\cdot(\text{-}2)^2-2}{((-2)^2+1)^3} = \frac{22}{125} > 0$.

  f'(0)=$\frac{-2}{-1} = -2 < 0$.

  f'(2)=$\frac{6\cdot 2^2-2}{(2^2+1)^3} = \frac{22}{125} > 0$.

  Per tant f serà cóncava en $(\text{-}\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})\cup(\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty)$ i convexa de $(\text{-}\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}})$ i tindrem dos punts d'inflexió en $(\text{-}\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{3}{4})$, $(\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{3}{4})$.

Exemple 4. Troba la concavitat i convexitat de la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

- El domini d'aquesta funció és $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, si ara fem la segona derivada d'aquesta funció tindrem:

$f\prime(x)=\frac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2}\to f\text{J}(x)=\frac{-4}{(x-1)^4}\to f'\prime(x)=\frac{4\cdot 2(\text{x-1})}{(x-1)^4}=\frac{8}{(x-1)^3}\to\frac{8}{(x-1)^3}=0\to 8=0$ i aquesta equació no té solució. Per tant si dividim la recta real tenint en compte el domini tindrem $\mathbb{R}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$f\text{J}(-2)=\frac{8}{(-2-1)^3}=\frac{8}{-27}<0$.

$f\text{J}(2)=\frac{8}{(2-1)^3}=8>0$.

Per tant f serà cóncava en $(1,+\infty)$ i convexa de $(-\infty,1)$ però no tindrem punts d'inflexió ni en $x=1$ ja que no és un punt del domini.

Exemple 5. Troba la concavitat i convexitat de la funció $f(x)=\frac{\text{x}^2}{\text{x}-1}$.

- El domini d'aquesta funció és $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$, si ara fem la segona derivada d'aquesta funció tindrem:

  f'(x)=$\frac{2x\cdot(\text{x-1})-\text{x}^2}{(x-1)^2}=\frac{\text{x}^2-2x}{(\text{x-1})^2}=\to$ f''(x)= $\frac{(\text{2x-2})\cdot(\text{x-1})^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\frac{(\text{x}-1)\cdot((\text{2x-2})\cdot(\text{x-1})\text{-}2(\text{x}^2-2x))}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}=0$ que no tindrà cap solució i per tant el domini queda dividit en $\mathbb{R}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

  f''(0)=$\frac{2}{-1}$<0.

  f''(2)=2>0

  Per tant f serà convexa en $(1,+\infty)$ i concava de $(-\infty,1)$ però no tindrem punts d'inflexió ni en $x=1$ ja que no és un punt del domini.

Exemple 6. Troba la concavitat i convexitat de la funció $f(x)=\frac{1}{\text{x}^2+4}$.

- El domini d'aquesta funció és $D=\mathbb{R}$, si ara fem la segona derivada d'aquesta funció tindrem:

  $f\prime(x)=\frac{-2x}{(x^2+4)^2}=0\to f\text{J}(x)=\frac{\text{-}2(\text{x}^2+4)^2+2x2(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4}=\frac{(\text{x}^2+4)(-2(x^2+4)+8x^2)}{(x^2+4)^4}=\frac{6x^2-8}{(x^2+4)^3}=0\to\begin{cases}\text{x=}\sqrt{\frac{4}{3}}\\ \text{x=-}\sqrt{\frac{4}{3}}\end{cases}$ i per tant el domini queda dividit en $D=\mathbb{R}=($-∞,-$\sqrt{\frac{4}{3}})\cup(-\sqrt{\frac{4}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}})\cup(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty)$ i seleccionant un punt de cada interval tindrem:

  f''(-3)=$\frac{46}{125}$>0.

  f''(0)=$\frac{-8}{64}$<0.

  f''(3)=$\frac{46}{125}$>0.,

  Per tant

- f concava en $(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty)$
- f convexa en (-$\sqrt{\frac{4}{3}}$, $\sqrt{\frac{4}{3}}$).
- f presenta dos punts d'inflexió en (-$\sqrt{\frac{4}{3}}$, $\frac{3}{7}$) i ($\sqrt{\frac{4}{3}}$, $\frac{3}{7}$).

Exemple 6. Representa gràficament $f(x) = x{\cdot}e^{\mathrm{x}}$.

- El domini d'aquesta funció és $D = \mathbb{R}$, si ara fem la segona derivada d'aquesta funció tindrem:

  f'(x)=e^{x}+x·e^{x} =e^{x}·(1+x)=0 $\rightarrow$ f''(x)=2e^{x}+x·e^{x} $= 0 \rightarrow$ e^{x}(2+x)= 0 $\rightarrow$ x=-2 i per tant el domini queda dividit en $D = \mathbb{R}$=(-∞,-2) ∪ (-2, +∞) i seleccionant un punt de cada interval tindrem:

  f''(-3)=$-\mathrm{e}^{-3}$<0.

  f''(0)=2>0

  Per tant, trobem que

  f concava en $(-2, +\infty)$.

  f convexa en (-∞, -2).

  f presenta un punt d'inflexió en (-2, $-2\mathrm{e}^{-2}$).