Exemple 1. *Calcula* $(2x+3)^4$, $(x+2/3)^3$, $(5x-2)^4$ *i* $(x-3)^3$.

Resolució.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

(i)

$$\begin{aligned}(2x+3)^4 &= (2x)^4+4\cdot(2x)^3\cdot 3+6\cdot(2x)^2\cdot 3^2+4\cdot(2x)\cdot 3^3+3^4\\ &= 16x^4+96x^3+216x^2+216x+81\end{aligned}$$

(ii)

$$(x+\frac{2}{3})^3=(x)^3+3\cdot(x)^2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot x\cdot(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^3=x^3+2x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{27}$$

(iii)

$$\begin{aligned}(5x-2)^4 &= (5x)^4-4\cdot(5x)^3\cdot 2+6\cdot(5x)^2\cdot 2^2-4\cdot(5x)\cdot 2^3+2^4\\ &= 625x^4-1000x^3+600x^2-160x+16\end{aligned}$$

(iv)

$$(x-3)^3=(x)^3-3\cdot(x)^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3=x^3-9x^2+27x-27$$

Exemple 2. *Troba el valor del paràmetre* a *per tal que el polinomi* x^4-5x^2+4x-a *sigui divisible per* $x+1$.

Resolució. Pel teorema del residu sabem que

$$res(x^4-5x^2+4x-a:x+1)=p(-1)$$

Per tant com que x^4-5x^2+4x-a ha d' ésser divisible per $x+1$, resulta que $res(x^4-5x^2+4x-a:x+1)=0$. D' aquesta manera

$$p(-1)=0$$

$$(-1)^4-5(-1)^2+4(-1)-a=1-5-4-a=-8-a=0$$

$$a=-8$$

Exemple 3. *Troba el valor del paràmetre a per tal que el polinomi* $2x^4+5x^3+ax+4$ *sigui divisible per* $x+4$.

Resolució. Pel teorema del residu sabem que

$$res(2x^4+5x^3+ax+4 : x+4) = p(-4)$$

Per tant com que $2x^4+5x^3+ax+4$ ha d' ésser divisible per $x+4$, resulta que $res(2x^4+5x^3+ax+4 : x+4) = 0$. D' aquesta manera

$$p(-4) = 0$$

$$2(-4)^4+5(-4)^3+a(-4)+4 = 512-320-4a+4 = 196-4a = 0$$

$$a = \frac{196}{4} = 49$$

Exemple 4. *Troba el residuo de les següents divisions sense efectuar-les:*

$$x^5-3x^4+2x^3-x^2+4x-6 : x+3$$

$$x^5-3x^4+2x^3-x^2+4x-6 : x-1$$

Resolució. (i) Pel teorema del residu sabem que

$$res(x^5-3x^4+2x^3-x^2+4x-6 : x+3) = p(-3)$$

$$(-3)^5-3(-3)^4+2(-3)^3-(-3)^2+4(-3)-6 = -567$$

(ii) Pel teorema del residu sabem que

$$res(x^5-3x^4+2x^3-x^2+4x-6 : x+3) = p(-3)$$

$$(-3)^5-3(-3)^4+2(-3)^3-(-3)^2+4(-3)-6 = -567$$

Exemple 5. *Sense efectuar la divisió contesta les següents qüestions:*

(i) *És divisible* x^3-27 *per* $x-3$*?*

(ii) *És divisor* $x+2$ *de* x^4-16*?*

(iii) $2x^4 + 17x^3 - 68x - 32$ *és múltiple de* $x + 1$?

(iv) $x^6 + 1$ *és divisible per* $x - 1$?

Resolució. (i) Pel teorema del residu sabem que

$$res(x^3 - 27 : x - 3) = p(3)$$

$$(3)^3 - 27 = 0$$

D' aquesta manera $x^3 - 27$ és divisible per $x - 3$.

(ii) Pel teorema del residu sabem que

$$res(x^4 - 16 : x + 2) = p(-2)$$

$$(-2)^4 - 16 = 0$$

D' aquesta manera $x + 2$ és divisor de $x^4 - 16$.

(iii) Pel teorema del residu sabem que

$$res(2x^4 + 17x^3 - 68x - 32 : x + 1) = p(-1)$$

$$2(-1)^4 + 17(-1)^3 - 68(-1) - 32 = 21$$

D' aquesta manera $2x^4 + 17x^3 - 68x - 32$ no és múltiple de $x + 1$.

(iv) Pel teorema del residu sabem que

$$res(x^6 + 1 : x - 1) = p(1)$$

$$(1)^6 + 1 = 2$$

D' aquesta manera $x^6 + 1$ no és divisible per $x - 1$.

Exemple 6. *Troba el valor de* a *per tal que el polinomi* $3x^4 + 4x^2 + x - a$ *al dividir-la per* $x - 3$ *tingui per residuo* 25.

Resolució. Pel teorema del residu sabem que

$$res(3x^4 + 4x^2 + x - a : x - 3) = p(3)$$

Per tant,

$$p(3) = 25$$

$$3(3)^4 + 4(3)^2 + 3 - a = 243 + 36 + 3 - a = 282 - a = 25$$
$$a = 257$$

Exemple 7. *Troba el valor de n per tal que el polinomi $2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + na^4$ sigui divisible per $x - a$.*

Resolució. Pel teorema del residu sabem que

$$res(2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + na^4 : x - a) = p(a)$$

Per tant,

$$p(a) = 0$$
$$2a^4 + 4aa^3 - 5a^2a^2 - 3a^3a + na^4 = -2a^4 + na^4 = 0$$
$$a = \frac{2a^4}{a^4} = 2$$

Exemple 8. *Troba un polinomi de grau 3 tal que $p(1) = p(2) = p(5) = 0$.*

Resolució. De manera elemental obtindrem que

$$p(x) = a(x-1)(x-2)(x-5)$$

Exemple 9. *Troba un polinomi de grau 3 tal que $p(1) = p(-1) = p(2) = 0$ de* manera que $p(-2) = 3$

Resolució. De manera elemental obtindrem que

$$p(x) = a(x-1)(x+1)(x-2)$$

finalment imposem que $p(-2) = 3$ i obtenim.

$$\begin{aligned} a(-2-1)(-2+1)(-2-2) &= 3 \\ -12a &= 3 \\ a &= \frac{3}{-12} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$