A més a més si definim la *recta normal* com la recta perpendicular a la tangent resulta que la recta normal té per equació

$$y - f(a) = \frac{-1}{f\prime(a)}\cdot(x-a)$$

Exemple 6. Troba la recta tangent i normal de la funció$f(x) = x^2 + 2x - 1$ en el punt $x = 2$

- $f(2) = 2^2 + 2\cdot2 - 1 = 7$
- $f\prime(2) = lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-1-7}{x-2} = lim_{x\to2}\frac{x^2+2x\text{-}8}{x-2} = lim_{x\to2}\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{x-2} = lim_{x\to2}(x+4) = 6$

Per tant la recta tangent que tindrem en el punt $x = 2$,

$$y - f(2) = f\prime(2)\cdot(x-2)$$
$$y - 7 = 6(x-2)$$
$$y = 6x - 5$$

Per altra banda, la recta normal en aquest punt serà,

$$y - f(2) = \frac{-1}{f'(2)}\cdot(x-2)$$

$$y - 7 = \frac{-1}{6}(x-2)$$

Exemple 7. Troba la recta tangent i normal de la funció $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en el punt $x = 3$

- $f(3) = 2$
- $f\prime(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \to f\prime(x) = \frac{-1}{2}$

Per tant la recta tangent a la funció en el punt $x = 3$ serà,

$$y - f(3) = f\prime(3)\cdot(x-3)$$
$$y - 2 = \frac{-1}{2}\cdot(x-3)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Per altra banda, la recta normal en aquest punt serà

$$y - f(3) = \frac{-1}{f'(3)} \cdot (x-3)$$

$$y - 2 = 2(x-3)$$

1.5 Exercicis resolts

Exercici 1. Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 4x^2+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

- Observem que $f(x)$ serà derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 0$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 0$ ja que si

  $f(x)$ no és contínua en el punt $x = 0$, aleshores ja no serà derivable.
- $f(0) = 0^2 + 1 = 1$
- $lim_{x\to 0^-} x^2 + 1 = 1$
- $lim_{x\to 0^+} 4x^2 + 1 = 1$

Per tant, f és contínua en el punt $x = 0$ i d'aquesta manera té sentit estudiar-ne la seva derivabilitat,

- $lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2+1\text{-}1}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2}{x} = lim_{x\to 0^+} 4 = 4$
- $lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1-1}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = lim_{x\to 0^-} x = 0$

  Per tant f és derivable a tot arreu excepte en el punt $x = 0$ on f no és derivable ja que $lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

  La derivada de f és, doncs, $f\prime(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 8x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

Exercici 2. Troba el valor del següent límit, $lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.