- Sigui $f(x) = e^x$ i observem que $lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = f\prime(0) = e^0 = 1$

Exercici 3. Troba el valor del següent límit, $lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$.

- Sigui $f(x) = sinx$ i observem que $lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = f\prime(0) = cos0 = 1$

Exercici 4. Troba la recta tangent a la corba $f(x) = x^2 - 3x - 4$ en els punts de tall amb l'eix X.

- Anem a buscar els punts de tall d'aquesta funció amb la recta $y = 0$.
  $x^2 - 3x - 4 = 0 \to x = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm 5}{2}$ amb $x_1 = 4$ i $x_2 = -1$. Per tant, hem de trobar la recta tangent en els punts $x_1 = 4$ i $x_2 = -1$.

  $f\prime(x) = 2x - 3$

  $f(4) = 0$

  $f\prime(4) = 2{\cdot}4 - 3 = 5$

  Aleshores, tindrem $y - f(4) = f\prime(4){\cdot}(x-4) \to y - 0 = 5{\cdot}(x-4) \to y = 5x - 20$.

  $f\prime(x) = 2x - 3$

  $f(4) = 0$

  $f\prime(4) = 2{\cdot}(-1) - 3 = -5$

  Aleshores, tindrem $y - f(4) = f\prime(4){\cdot}(x - 4) \to y - 0 = -5{\cdot}(x - 4) \to y = -5x + 20$.

Exercici 5. Escriu la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 - 6x$ en els punts de tall amb la recta $y = x$.

- Anem a cercar, primerament, els punts de tall de la funció amb la recta $y = x$.
  $\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x = x \Rightarrow x^2 - 7x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 7 \end{cases}$. Per tant, haurem de buscar les rectes tangents en els punts $x_1 = 0$ i $x_2 = 7$.

  $f(0) = 0$

  $f\prime(0) = 2{\cdot}0 - 6 = -6$. Aleshores, $y - f(0) = f\prime(0){\cdot}(x - 0) \to y = -6{\cdot}x$

  $f(7) = 0$

  $f\prime(7) = 2{\cdot}7 - 6 = 8$. Aleshores, $y - f(0) = f\prime(0){\cdot}(x - 0) \to y = 8{\cdot}(x - 7)$.

Exercici 6. Troba en quin punt les rectes tangents a les corbes $f(x) = x^2 - 3x + 5$ i $g(x) = 3x^2 - 5x + 2$ són paral·leles.

- Dues rectes són paral·leles quan les seves pendents són iguals, per tant, com que $f\prime(x) = 2x - 3$ i $g\prime(x) = 6x - 5$, haurem d'igualar els seus pendents i aleshores, resulta que, $2x - 3 = 6x - 5 \rightarrow -4x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Exercici 7. Troba en quins punts la recta tangent a la gràfica de la funció $\mathrm{f}(x) = x^2 + 2x - 3$ té pendent horitzontal.

- Per tal que la recta tangent tingui pendent horitzontal cal que la seva derivada valgui 0 i per tant tindrem que $\mathrm{f}\prime(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$.

Exercici 8. Troba totes les rectes tangents a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ que tenen de pendent -1.

- Com que el pendent de la recta tangent és la derivada haurem d'igualar $f\prime(x) = -1$. Per tant, $f\prime(x) = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = -1 \rightarrow \frac{-4}{(x-1)^2} = -1 \rightarrow 4 = (x-1)^2 \rightarrow x - 1 = \pm 2 \rightarrow x = 1 \pm 2$. Així, doncs, tindrem dues solucions $x_1 = 3$ i $x_2 = -1$.

  $f(3) = \frac{6}{2} = 3$

  $f\prime(3) = -1$

  Aleshores, tindrem que $y - f(3) = f\prime(3) \cdot (x - 3) \rightarrow y - 3 = -1 \cdot (x - 3) \rightarrow y = -x + 6$

  $f(3) = \frac{2}{-2} = -1$

  $f\prime(3) = -1$

  Aleshores tindrem que $y - f(-1) = f\prime(-1) \cdot (x + 1) \rightarrow y + 1 = -1 \cdot (x + 1) \rightarrow y = -x - 2$.

Exercici 9. Troba la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = \frac{1}{x+1}$ que és ortogonal a la recta $y = 9x - 2$.

- Per tal que dues rectes siguin perpendiculars cal que el producte dels seus pendents sigui -1. Per una banda el pendent de la funció $f(x) = \frac{1}{x+1}$ és $f\prime(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ i per altra, el pendent de la recta és 9. Així, doncs, caldrà que $\frac{-1}{(x+1)^2} \cdot (9) = -1 \rightarrow (x+1)^2 = 9 \rightarrow x + 1 = \pm 3$ i aleshores $x_1 = 2$ i $x_2 = -4$.

$f(2) = \frac{1}{3}$.

$f\prime(2) = \frac{-1}{9}$.

Aleshores la recta tangent que tindrem serà $y - f(2) = f\prime(2)\cdot(x-2) \rightarrow y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}\cdot(x-2)$

$f(2) = \frac{-1}{3}$.

$f\prime(2) = \frac{-1}{9}$.

Aleshores la recta tangent que tindrem serà $y - f(-4) = f\prime(-4)\cdot(x+4) \rightarrow y + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}\cdot(x+4)$

Exercici 10. Troba la recta tangent i la recta normal a la corba $y = x^3+5x^2-3x+2$ en el punt $x = 1$.

- La forma de la recta tangent de $y = f(x)$ en el punt $x = 1$ són,

  $f(1) = 1^3 + 5\cdot1^2 - 3\cdot1 + 2 = 1 + 5 - 3 + 2 = 5$

  $f\prime(1) = 3\cdot1^2 + 10\cdot1 - 3 = 10$

  $y - f(1) = f\prime(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y - 5 = 10\cdot(x-1) \Rightarrow y = 10x - 5$

  Per altra banda, la recta normal a la corba en $x = 1$ és la recta perpendicular a la recta tangent i per tant la seva equació serà

  $$y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)}\cdot(x-1)$$

  $$y - 5 = \frac{-1}{10}\cdot(x-1)$$

  Aleshores y-5=$\frac{-1}{10}$·(x-1).

Exercici 11. Troba la tangent a la paràbola $y = x^2 + 3x + 1$ que sigui paral·lela a la recta $y = 2x - 5$.

- En aquest exercici, caldrà imposar que el pendent de la paràbola sigui el pendent de la recta. Per tant,

  $2x + 3 = 2 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$. Per tant caldrà trobar la recta tangent en el punt $x = \frac{-1}{2}$.

  $f(\frac{-1}{2}) = (\frac{-1}{2})^2 + 3\cdot(\frac{-1}{2}) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1-6+4}{4} = \frac{-1}{5}$

  $f\prime(\frac{-1}{2}) = 2\cdot(\frac{-1}{2}) + 3 = 2$

I per tant, serà,

$$y - f(\frac{-1}{2}) = f\prime(\frac{-1}{2})\cdot(x + \frac{1}{2})$$
$$y + \frac{1}{5} = 2\cdot(x + \frac{1}{2})$$

Exercici 12. Donada la funció $f(x) = x^2 + 3x - 4$ troba la recta tangent i la recta normal a la corba en els punts de tall amb l'eix X.

- En aquest problema, observem que cal igualar la corba $f(x) = x^2 + 3x - 4$ a y=0 i per tant resoldrem el sistema $\left\{ \begin{array}{c} y = x^2 + 3x - 4 \\ y = 0 \end{array} \right.$ i caldrà resoldre l'equació $x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-3\pm5}{2} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{array} \right.$. Així, doncs, les rectes tangents i normals seran en $x_1 = 1$ i $x_2 = -4$

  $f(1) = 0$

  $f\prime(1) = 2\cdot1 + 3 = 5$

  Recta tangent $y = 5\cdot(x - 1)$

  Recta normal $y = \frac{-1}{5}\cdot(x - 1)$

  $f(-4) = 0$

  $f\prime(-4) = 2\cdot(-4) + 3 = -5$

  Recta tangent $y = -5\cdot(x + 4)$

  Recta normal $y = \frac{1}{5}\cdot(x + 4)$.

1.6 Exercicis per resoldre

1. Estudia la continuïtat de les següents funcions:

   - $f(x) = \frac{4x-8}{x^2-4}$
   - $g(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 4x - 3 & \text{si} & x > 2 \\ 5 & \text{si} & x = 2 \\ 8x - 11 & \text{si} & x < 2 \end{array} \right.$
   - $h(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 3x - 3 & \text{si} & x \leq 2 \\ x + 4 & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$