Creixement i decreixement d'una funció.

Exercici 1. *Estudia el creixement i decreixement de la funció*

$$f(x)=x^3-9x^2+15x-3$$

- Observem que aquesta funció és un polinomi i per tant el seu domini seran tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = 3x^2-18x+15 = 0 \rightarrow x^2-6x+5 = 0 \rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{36\text{-}20}}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$, la qual cosa permet separar la recta real en tres intervals $\mathbb{R} = (-\infty, 1)\cup(1, 5)\cup(5, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

  $f\prime(0) = 3(0)^2 - 18{\cdot}(0) + 15 = 15 > 0.$

  $f\prime(2) = 3(2)^2 - 18{\cdot}(2) + 15 = -9 < 0.$

  $f\prime(6) = 3(6)^2 - 18{\cdot}(6) + 15 = 27 > 0.$

  Així, doncs, tindrem que f és **creixent** en $(\text{-}\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ mentre que és **decreixent** en $(1, 5)$. Per tant tindrem un màxim $x = 1$ que valdrà $(1)^3-9(1)^2+15(1) - 3 = 4$ i un mínim en $x = 5$ que valdrà $5^3 - 9{\cdot}5^2 + 15{\cdot}5 - 3 = -28$.

Exercici 2. *Estudia el creixement i decreixement de la funció*

$$f(x)=x^3-4x^2+5x-2$$

- Observem que aquesta funció és un polinomi i per tant el seu domini seran tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{8\pm\sqrt{64\text{-}60}}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$, la qual cosa permet separar la recta real en tres intervals $\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (1, \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

$f\prime(0) = 3{\cdot}0^2 - 8{\cdot}0{+}5 = 5 > 0.$

$f\prime(1,1) = 3(1,1)^2 - 8(1,1) + 5 < 0.$

$f\prime(3) = 3(3)^2 - 8(3) + 5 = 8 > 0.$

Així, doncs, tindrem que f és **creixent** en $(\text{-}\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$ mentre que és **decreixent** en $(1, \frac{5}{3})$. Per tant tindrem un màxim $x = 1$ que valdrà *(1)*^{3}*-4(1)*^{2}*+5(1)-2=0* i un mínim en $x = \frac{5}{3}$ que valdrà $(\frac{5}{3})^3$-$4(\frac{5}{3})^2$+$5(\frac{5}{3})$-2=$\frac{125}{27} - \frac{100}{9} + \frac{25}{3} - 2 = \frac{125-300+225-54}{27} = \frac{-4}{27}$.

Exercici 3. *Estudia el creixement i decreixement de la funció*

$$f(x) = x^2\, e^{x^2-4x}$$

- Observem que el domini d' aquesta funció són tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = 2xe^{x^2-4x} + e^{x^2-4x}(2x-4)x^2 = e^{x^2-4x}(2x+2x^3-4x^2) \to e^{x^2-4x}(2x+2x^3-4x^2) = 0 \to (2x+2x^3-4x^2) = 0 \to$ x$\cdot(2\text{x}^2 - 4x + 2) = 0.$

  Per tant o bé$x = 0$ o bé $2\text{x}^2 - 4x + 2 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{16\text{-}16}}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$, la qual cosa permet separar la recta real en tres intervals $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

  $f\prime(-1) = e^5(2(-1) + 2(-1)^3 - 4(-1)) < 0$

  $f\prime(1,1) = e^{-3.19}(2(1,1) + 2(1,1)^3 - 4(1,1)) > 0$

  $f\prime(2) = e^{-3}(2(2) + 2(2)^3 - 4(2)) > 0$

  Així, doncs, tindrem que f és **creixent** en $(0,+\infty)$ mentre que és **decreixent** en $(-\infty, 0)$. Per tant tindrem un mínim en $x = 0$ que valdrà f(0)=0.

Exercici 4. *Estudia el creixement i decreixement de la funció*

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

- Observem que el domini d' aquesta funció són tots els nombres reals positius, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

$f\prime(x) = 2x + \frac{1}{x} \rightarrow 2x + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{2x^2+1}{x} = 0 \rightarrow 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-1}{2}$, la qual cosa no és possible.

Per tant, prenem com a valor el que volguem, mentre sigui positiu. Així, $f\prime(3) = 2{\cdot}3+\frac{1}{3} = \frac{19}{3} > 0$ i, per tant f és sempre creixent.

Exercici 5. *Estudia el creixement i decreixement de la funció*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

- Observem que aquesta funció té per domini$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$, la qual cosa permet separar la recta real en quatre intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

  $f\prime(-3) = \frac{-2\cdot(-3)}{((-3)^2-1)^2} = \frac{+6}{64} = \frac{+3}{32} > 0.$

  $f\prime(-0,5) = \frac{-2\cdot(-0,5)}{((-0,5)^2-1)^2} > 0.$

  $f\prime(0,5) = \frac{-2\cdot(0,5)}{((0,5)^2-1)^2} < 0.$

  $f\prime(2) = \frac{-2\cdot 3}{(3^2-1)^2} = \frac{-6}{64} = \frac{-3}{32} < 0.$

  Així, doncs, tindrem

  f és **creixent** $(-\infty, 0)$ mentre que és **decreixent** en $(0, +\infty)$. Per tant tindrem en $x = 0$ un màxim que valdrà $f(0) = \frac{1}{0^2-1} = -1$.

Exercici 6. *Estudia el creixement i decreixement de la funció*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

- Observem que aquesta funció té per domini$D(f) = \mathbb{R}$, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$, la qual cosa permet separar la recta real en dos intervals $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

$f\prime(-3) = \frac{-2\cdot(-3)}{((-3)^2+1)^2} = \frac{+6}{100} = \frac{+3}{32} > 0.$

$f\prime(3) = \frac{-2\cdot 3}{(3^2 11)^2} = \frac{-6}{100} = \frac{-3}{32} < 0.$

Així, doncs, tindrem

f és **creixent** (-$\infty, 0)$ mentre que és **decreixent** en $(0, +\infty)$. Per tant tindrem en $x = 0$ un màxim que valdrà $f(0) = \frac{1}{0^2+1} = 1$.