1.5 Exercicis resolts

Exercici 1. Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 4x^2+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

- Observem que $f(x)$ serà derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 0$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 0$ ja que si

  $f(x)$ no és contínua en el punt $x = 0$, aleshores ja no serà derivable.
- $f(0) = 0^2 + 1 = 1$
- $lim_{x\to 0^-} x^2 + 1 = 1$
- $lim_{x\to 0^+}\ 4x^2 + 1 = 1$

Per tant, f és contínua en el punt $x = 0$ i d'aquesta manera té sentit estudiar-ne la seva derivabilitat,

- $lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2+1\text{-}1}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2}{x} = lim_{x\to 0^+} 4 = 4$
- $lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1-1}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = lim_{x\to 0^-} x = 0$

  Per tant f és derivable a tot arreu excepte en el punt $x = 0$ on f no és derivable ja que $lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

  La derivada de f és, doncs, $f\prime(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 8x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

Exercici 2. Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció a partir dels valors de a i b.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x < 0 \\ a + x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- Observem que $f(x)$ és contínua i derivable sempre excepte, pot ser , en els punts $x = 0$ i $x = 1$.

  Comencem estudiant, doncs, la continuïtat de $f(x)$ en $x = 0$ i $x = 1$,

$f(0) = a + 0^2 = a$

$lim_{x\to 0^+} a + x^2 = a$

$lim_{x\to 0^-} cosx = 1$

I, aleshores, per tant $a = 1$.

$f(1) = a + 1^2 = a + 1$

$lim_{x\to 1^-} a + x^2 = a + 1$

$lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x} = b$

I, aleshores, per tant $b = a + 1 = 2$.

Així, doncs, per tal que f pugui ser derivable caldrà tenir la funció

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Estudiem, ara, la seva derivabilitat en $x = 0$

$lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2-1}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x-0} = lim_{x\to 0^+} x = 0.$

$lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{cosx-1}{x-0} = sin0 = 0.$

Per tant, f és derivable en $x = 0$, vegem què passa en $x = 1$.

$lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{2}{x}-2}{x-1} = lim_{x\to 1^+} \frac{2-2x}{x\cdot(x-1)} = lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x} = -2.$

$lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^-} \frac{1+x^2-2}{x-1} = lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = lim_{x\to 1^-} x + 1 = 2.$

Per tant f no és derivable en $x = 1$.

Així, doncs, la derivada de f en general és,

$$f\prime(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ -\frac{b}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Exercici 2. Troba el valor del següent límit, $lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

- Sigui $f(x) = e^x$ i observem que $lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = f\prime(0) = e^0 = 1$

Exercici 3. Troba el valor del següent límit, $lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x}$.

- Sigui $f(x) = sinx$ i observem que $lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = f\prime(0) = cos0 = 1$

Exercici 4. Troba la recta tangent a la corba $f(x) = x^2 - 3x - 4$ en els punts de tall amb l'eix X.

- Anem a buscar els punts de tall d'aquesta funció amb la recta $y = 0$.
  $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$ amb $x_1 = 4$ i $x_2 = -1$. Per tant, hem de trobar la recta tangent en els punts $x_1 = 4$ i $x_2 = -1$.

  $f\prime(x) = 2x - 3$

  $f(4) = 0$

  $f\prime(4) = 2{\cdot}4 - 3 = 5$

  Aleshores, tindrem $y - f(4) = f\prime(4){\cdot}(x-4) \rightarrow y - 0 = 5{\cdot}(x-4) \rightarrow y = 5x - 20$.

  $f\prime(x) = 2x - 3$

  $f(4) = 0$

  $f\prime(4) = 2{\cdot}(-1) - 3 = -5$

  Aleshores, tindrem $y - f(4) = f\prime(4){\cdot}(x - 4) \rightarrow y - 0 = -5{\cdot}(x - 4) \rightarrow y = -5x + 20$.

Exercici 5. Escriu la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 - 6x$ en els punts de tall amb la recta $y = x$.

- Anem a cercar, primerament, els punts de tall de la funció amb la recta $y = x$.
  $\left\{\begin{array}{c} y = x^2 - 6x \\ y = x \end{array}\right. \Rightarrow x^2 - 6x = x \Rightarrow x^2 - 7x = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 = 7 \end{array}\right.$. Per tant, haurem de buscar les rectes tangents en els punts $x_1 = 0$ i $x_2 = 7$.

  $f(0) = 0$

  $f\prime(0) = 2{\cdot}0 - 6 = -6$. Aleshores, $y - f(0) = f\prime(0){\cdot}(x - 0) \rightarrow y = -6{\cdot}x$

  $f(7) = 0$

  $f\prime(7) = 2{\cdot}7 - 6 = 8$. Aleshores, $y - f(0) = f\prime(0){\cdot}(x - 0) \rightarrow y = 8{\cdot}(x - 7)$.

Exercici 6. Troba en quin punt les rectes tangents a les corbes $f(x) = x^2 - 3x + 5$ i $g(x) = 3x^2 - 5x + 2$ són paral·leles.

- Dues rectes són paral·leles quan les seves pendents són iguals, per tant, com que $f\prime(x) = 2x - 3$ i $g\prime(x) = 6x - 5$, haurem d'igualar els seus pendents i aleshores, resulta que, $2x - 3 = 6x - 5 \rightarrow -4x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Exercici 7. Troba en quins punts la recta tangent a la gràfica de la funció $\mathrm{f}(x) = x^2 + 2x - 3$ té pendent horitzontal.

- Per tal que la recta tangent tingui pendent horitzontal cal que la seva derivada valgui 0 i per tant tindrem que $\mathrm{f}\prime(x) = 2x + 2 = 0 \to 2x = -2 \to x = -1$.

Exercici 8. Troba totes les rectes tangents a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ que tenen de pendent -1.

- Com que el pendent de la recta tangent és la derivada haurem d'igualar $f\prime(x) = -1$. Per tant, $f\prime(x) = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = -1 \to \frac{-4}{(x-1)^2} = -1 \to 4 = (x-1)^2 \to x - 1 = \pm 2 \to x = 1 \pm 2$. Així, doncs, tindrem dues solucions $x_1 = 3$ i $x_2 = -1$.

  $f(3) = \frac{6}{2} = 3$

  $f\prime(3) = -1$

  Aleshores, tindrem que $y - f(3) = f\prime(3) \cdot (x - 3) \to y - 3 = -1 \cdot (x - 3) \to y = -x + 6$

  $f(3) = \frac{2}{-2} = -1$

  $f\prime(3) = -1$

  Aleshores tindrem que $y - f(-1) = f\prime(-1) \cdot (x + 1) \to y + 1 = -1 \cdot (x + 1) \to y = -x - 2$.

Exercici 9. Troba la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = \frac{1}{x+1}$ que és ortogonal a la recta $y = 9x - 2$.

- Per tal que dues rectes siguin perpendiculars cal que el producte dels seus pendents sigui -1. Per una banda el pendent de la funció $f(x) = \frac{1}{x+1}$ és $f\prime(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ i per altra, el pendent de la recta és 9. Així, doncs, caldrà que $\frac{-1}{(x+1)^2} \cdot (9) = -1 \to (x+1)^2 = 9 \to x + 1 = \pm 3$ i aleshores $x_1 = 2$ i $x_2 = -4$.

  $f(2) = \frac{1}{3}$.

  $f\prime(2) = \frac{-1}{9}$.

  Aleshores la recta tangent que tindrem serà $y - f(2) = f\prime(2) \cdot (x - 2) \to y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9} \cdot (x - 2)$

  $f(2) = \frac{-1}{3}$.

$f\prime(2) = \frac{-1}{9}$.

Aleshores la recta tangent que tindrem serà $y - f(-4) = f\prime(-4)\cdot(x+4) \rightarrow y + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}\cdot(x+4)$

Exercici 10. Troba la recta tangent i la recta normal a la corba $y = x^3+5x^2-3x+2$ en el punt $x = 1$.

- La forma de la recta tangent de $y = f(x)$ en el punt $x = 1$ són,

  $f(1) = 1^3 + 5\cdot1^2 - 3\cdot1 + 2 = 1 + 5 - 3 + 2 = 5$

  $f\prime(1) = 3\cdot1^2 + 10\cdot1 - 3 = 10$

  $y - f(1) = f\prime(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y - 5 = 10\cdot(x-1) \Rightarrow y = 10x - 5$

  Per altra banda, la recta normal a la corba en $x = 1$ és la recta perpendicular a la recta tangent i per tant la seva equació serà

$$y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)}\cdot(x-1)$$

$$y - 5 = \frac{-1}{10}\cdot(x-1)$$

  Aleshores y-5=$\frac{-1}{10}$·(x-1).

Exercici 11. Troba la tangent a la paràbola $y = x^2 + 3x + 1$ que sigui paral·lela a la recta $y = 2x - 5$.

- En aquest exercici, caldrà imposar que el pendent de la paràbola sigui el pendent de la recta. Per tant, $2x + 3 = 2 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$. Per tant caldrà trobar la recta tangent en el punt $x = \frac{-1}{2}$.

  $f(\frac{-1}{2}) = (\frac{-1}{2})^2 + 3\cdot(\frac{-1}{2}) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1-6+4}{4} = \frac{-1}{5}$

  $f\prime(\frac{-1}{2}) = 2\cdot(\frac{-1}{2}) + 3 = 2$

  I per tant, serà,

$$y - f(\frac{-1}{2}) = f\prime(\frac{-1}{2})\cdot(x + \frac{1}{2})$$

$$y + \frac{1}{5} = 2\cdot(x + \frac{1}{2})$$

Exercici 12. Donada la funció $f(x) = x^2 + 3x - 4$ troba la recta tangent i la recta normal a la corba en els punts de tall amb l'eix X.

- En aquest problema, observem que cal igualar la corba $f(x) = x^2 + 3x - 4$ a y=0 i per tant resoldrem el sistema $\left\{ \begin{array}{c} y = x^2 + 3x - 4 \\ y = 0 \end{array} \right.$ i caldrà resoldre l'equació $x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{array} \right.$. Així, doncs, les rectes tangents i normals seran en $x_1 = 1$ i $x_2 = -4$

  $f(1) = 0$

  $f\prime(1) = 2{\cdot}1 + 3 = 5$

  Recta tangent $y = 5{\cdot}(x - 1)$

  Recta normal $y = \frac{-1}{5}{\cdot}(x - 1)$

  $f(-4) = 0$

  $f\prime(-4) = 2{\cdot}(-4) + 3 = -5$

  Recta tangent $y = -5{\cdot}(x + 4)$

  Recta normal $y = \frac{1}{5}{\cdot}(x + 4)$.

Exercici 10. Troba la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = x^2 + 3x - 2$ que passa pel punt $(1, 0)$.

- Observem en aquest cas que el punt donat no passa pel punt $(1, 0)$. Per tant, busquem de totes les rectes tangent la que passa pel punt $(a, a^2 + 3a - 2)$ i té per pendent $f\prime(a) = 2a + 3$.

  La recta tangent serà doncs $y - (a^2 + 3a - 2) = (2a + 3){\cdot}(x - a)$ i imposem, ara, que passi pel punt $(1, 0)$.

  $-a^2 - 3a + 2 = (2a + 3){\cdot}(1 - a)$, que dona l'equació $a^2 - 2a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$. Així, doncs, tindrem per rectes tangents:

  Si $a = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \rightarrow y - ((\frac{2+\sqrt{8}}{2})^2 + 3{\cdot}\frac{2+\sqrt{8}}{2} - 2) = (2{\cdot}\frac{2+\sqrt{8}}{2} + 3){\cdot}(x - (\frac{2+\sqrt{8}}{2}))$.

  Si $a = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \rightarrow y - ((\frac{2-\sqrt{8}}{2})^2 + 3{\cdot}\frac{2-\sqrt{8}}{2} - 2) = (2{\cdot}\frac{2-\sqrt{8}}{2} + 3){\cdot}(x - (\frac{2-\sqrt{8}}{2}))$.

Exercici 14. Donada la paràbola $y = (x - 1)^2$ troba les equacions de les rectes tangents que passen pel punt $(0, 0)$.

- En aquest cas, observem que el punt $(0, 0)$ no és de la funció, per tant buscarem totes les rectes tangents a la corba que passen pel punt $(a, (a-1)^2)$.

  $f(a) = (a - 1)^2$