Exercici 1. *Calcula*

(i)
$$\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\cdot\sqrt[5]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[5]{ab^3\sqrt{a}}}$$

(ii)
$$6\sqrt{27}+2\sqrt{243}$$

(iii)
$$\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}+2}{2\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$$

Resolució.

(i) $\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\cdot\sqrt[5]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[5]{ab^3\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{a^3a^2b}}\cdot\sqrt[5]{a\sqrt{\sqrt[3]{a^3a}}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a^2b^6a}}} = \frac{\sqrt[6]{a^5b}\cdot\sqrt[30]{a^{10}}}{\sqrt[10]{a^3b^6}} = \sqrt[30]{\frac{a^{25}b^5a^{10}}{a^9b^{18}}} = \sqrt[30]{\frac{a^{26}}{b^{13}}}$

(ii) $6\sqrt{27}+2\sqrt{243} = 6\sqrt{3^3}+2\sqrt{3^5} = 6\cdot3\sqrt{3}+2\cdot3^2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}+18\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

(iii) $\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}+2}{2\sqrt{7}-2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{(3\sqrt{5}+2)(2\sqrt{7}-2\sqrt{2})}{(2\sqrt{7}-2\sqrt{2})(2\sqrt{7}-2\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{6\sqrt{35}-6\sqrt{10}+4\sqrt{7}-4\sqrt{2}}{20} = \frac{16\sqrt{5+}6\sqrt{35}-6\sqrt{10}+4\sqrt{7}-4\sqrt{2}}{20}$

Exercici 2. *El volum d' un con respon a la fórmula* $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$.

$$\begin{aligned} \pi &= 3,14 \pm 0,1 \\ r &= 5 \pm 0,2 \\ h &= 8 \pm 0,1 \end{aligned}$$

Troba el volum i els seus error absoluts i relatius.

Resolució.

$$V = \frac{1}{3}\cdot 3,14\cdot 5^2\cdot 8 = 209,333$$
$$e_r(\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h) = e_r(\frac{1}{3}) + e_r(\pi)+2\cdot e_r(r)+e_r(h) = 0,0956$$

$$e_a(\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h) = 209,333\cdot 0,0,0956 = 20,01$$

Així,

$$V = 209,33 \pm 20,01$$

Exercici 3. *Considerem els polinomis*

$$p(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48$$

$$q(x) = x^4 + x^3 - 23x^2 + 3x + 90$$

(i) *Factoritza el polinomi* $p(x)$

(ii) *Factoritza el polinomi* $q(x)$

(iii) *Resol l' equació* $p(x) = 0$

(iv) *Resol l' equació* $q(x) = 0$

(v) *Calcula el mcd i mcm dels polinomis* $p(x)$ *i* $q(x)$.

Resolució. (i)

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & -3 & -12 & 52 & 48 \\
2 & & 2 & -2 & -28 & -48 \\
 & 1 & -1 & -14 & 24 & 0 \\
2 & & 2 & 2 & -24 & \\
 & 1 & 1 & -12 & 0 & \\
3 & & 3 & 12 & & \\
 & 1 & 4 & 0 & & \\
-4 & & -4 & & & \\
 & 1 & 0 & & &
\end{array}$$

Aleshores, $p(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48 = (x+4)\cdot(X-3)\cdot(x-2)^2$.

(ii)

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 1 & -23 & 3 & 90 \\
-2 & & -2 & 2 & 42 & -90 \\
 & 1 & -1 & -21 & 45 & 0 \\
3 & & 3 & 6 & -45 & \\
 & 1 & 2 & -15 & 0 & \\
3 & & 3 & 15 & & \\
 & 1 & 5 & 0 & & \\
-5 & & -5 & & & \\
 & 1 & 0 & & &
\end{array}$$

Aleshores, $q(x) = x^4 + x^3 - 23x^2 + 3x + 90 = (x-3)^2{\cdot}(x+2){\cdot}(x+5)$.

(iii) Observem que $p(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48 = (x+4){\cdot}(x-3){\cdot}(x-2)^2$. Per tant,

$$x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48 = 0$$

$$(x+4){\cdot}(X-3){\cdot}(x-2)^2 = 0$$

D' aquesta manera, les solucions seran $x = -4$, $x = 3$ i $x = 2$.

(iv) Observem que $q(x) = x^4 + x^3 - 23x^2 + 3x + 90 = (x-3)^2{\cdot}(x+2){\cdot}(x+5)$. Per tant,

$$x^4 + x^3 - 23x^2 + 3x + 90 = 0$$

$$(x-3)^2{\cdot}(x+2){\cdot}(x+5) = 0$$

D' aquesta manera, les solucions seran $x = 3$, $x = -2$ i $x = -5$.

(iv) Per tal de calcular el mcd de dos polinomis, cal agafar els factors repetits amb l' exponent més petit; mentre que per calcular mcm calprendre els factors repetits amb l' exponent més gran i els factors no repetits.

$$p(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48 = (x+4){\cdot}(x-3){\cdot}(x-2)^2$$

$$q(x) = x^4 + x^3 - 23x^2 + 3x + 90 = (x-3)^2{\cdot}(x+2){\cdot}(x+5)$$

Per tant,

$$mcd = (x-3)$$

$$mcm = (x-3)^2{\cdot}(x+2){\cdot}(x+5){\cdot}(X+4){\cdot}(x-2)^2$$

Exercici 4. *Calcula*

(i)

$$\frac{\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{x+4}{x^2+x-2}}{\frac{x-3}{x+1} - \frac{x+4}{x-1}}$$

R*esolució.*

(i)

$$\frac{\frac{x+2}{x^2-1}-\frac{x+4}{x^2+x-2}}{\frac{x-3}{x+1}-\frac{x+4}{x-1}} = (\frac{x+2}{x^2-1}-\frac{x+4}{x^2+x-2}) : (\frac{x-3}{x+1}-\frac{x+4}{x-1})$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)-(x+4)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} : \frac{(x-3)(x-1)-(x+4)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{-3x}{(x-1)(x+1)(x-2)} : \frac{-9x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(-3x)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)(-9x-1)} = \frac{-3x}{(x-2)(-9x-1)}$$

$$= \frac{-3x}{(x-2)(-9x-1)}$$

Exercici 5. *Troba el valor del paràmetre a per tal que el polinomi* x^3+2x^2-ax+3 *sigui divisible per* $x-1$.

Resolució. Pel teorema del residu sabem que

$$res(x^3+2x^2-ax+3 : x-1) = p(1)$$

Per tant com que x^3+2x^2-ax+3 ha d' ésser divisible per $x-1$, resulta que $res(x^3+2x^2-ax+3 : x-1) = 0$. D' aquesta manera

$$p(1) = 0$$

$$1^3 + 2{\cdot}1^2 - a{\cdot}1 + 3 = 1 + 2 - a + 3 = 6 - a = 0$$

$$a = 6$$