Solucions examen 2

1.- *Troba la derivada de la funció f(x)=* x^2*+2x-3 en el punt d' abscissa x=3 a partir de la definició.*

Solució: f'(3)= $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-3-12}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+5)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+5) = 8$.

2.- D*onada la funció*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(i) *Estudia la continuïtat en funció dels valors de a.*

(ii) *Estudia la derivabilitat en funció dels valors de a.*

(iii) *Calcula la derivada en cas que sigui possible.*

Solució. (i) Observem que $f(x)$ serà contínua i derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 1$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 1$ ja que si $f(x)$ no és contínua en $x = 1$, aleshores ja no podrà ésser derivable en aquest punt.

- $f(1) = 1^2 + a{\cdot}1 - 2 = a - 1$.
- $lim_{x\to 1^-} x^2 + ax - 2 = a - 1$.
- $lim_{x\to 1^+} x^2 - 3x + 4 = 2$.

Per tant, f és contínua en el punt $x = 1$ si $a - 1 = 2 \to a = 3$.

És a dir si $a \neq 3$, aleshores, f presenta una discotinuïtat de salt en $x = 1$ i no caldrà, doncs, estudiar la derivabilitat.

Si $a = 3$ aleshores f serà contínua en $x = 1$ i la funció podrà ser derivable en aquest punt.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- $lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+3x-2-2}{x-1} = lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+3x-4}{x-1} = lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\cdot(x+4)}{x-1}$ $= \lim_{x\to 1^-}(x+4) = 5.$
- $lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+4-2}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x-1}$ $= \lim_{x\to 1^-}(x-2) = -1.$

Per tant, f és derivable a tot arreu excepte en el punt $x = 1$ ja que en aquest punt $lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

(iii)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x-3x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3.- Derivades

- $f(x) = \sqrt[6]{x^7} + 8x^3 - 3x + 4 \longrightarrow f(x) = \frac{7}{6}\sqrt[6]{x} + 24x^2 - 3x$
- $f(x) = (x^2+3x-2)\cdot lnx \longrightarrow f\prime(x) = (2x+3)\cdot lnx + \frac{1}{x}\cdot(x^2+3x-2)$
- $f(x) = \frac{x^3+2x-2}{x+2} \longrightarrow f'(x) = \frac{(3x^2+2)\cdot(x+2)-(x^3+2x-2)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+6x^2+2}{(x+2)^2}$
- $f(x) = (\frac{2x+3}{4x+5})^4 \longrightarrow f'(x) = 4(\frac{2x+3}{4x+5})^3\cdot\frac{2(4x+5)-4(2x+3)}{(x+2)^2} = 4(\frac{2x+3}{4x+5})^3\cdot\frac{22}{(x+2)^2}$
- $f(x) = \sin(2e^x - x^3 + 2x - 1) \longrightarrow f'(x) = \cos(2e^x - x^3 + 2x - 1)\cdot(2e^x - 3x^2 + 2)$
- $f(x) = e^{x\cos x} \longrightarrow f'(x) = e^{x\cos x}\cdot(1cosx + x\cdot(-sinx))$
- $f(x) = (x^2+3x-1)^4 \longrightarrow f'(x) = 4(x^2+3x-1)^3\cdot(2x+3)$
- $f(x) = arctag(e^x - 1) \longrightarrow f\prime(x) = \frac{1}{1+(e^x-1)^2}\cdot e^x$
- $f(x) = tag(3x^2+5x-1) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(3x^2+5x-1)}\cdot(6x+5)$
- $f(x) = 4^{x^2+2x-1} \longrightarrow f'(x) = 4^{x^2+2x-1}\cdot(2x+2)\cdot ln4$
- $f(x) = \log_4(2x-3) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2x-3}\cdot 2\cdot\frac{1}{\ln 4}$
- $f(x) = \sqrt{x^4+3x-1} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+3x-1}}\cdot(4x^3+3)$