Solucions examen 3

1.- *Estudia la continuïtat i la derivabilitat de les funcions*

(i)

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6}$$

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x-1 & \text{si} \quad x<1 \\ x+3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solució. (i) El domini de la funció $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6}$ és $D = \mathbb{R}\backslash\{1,-6\}$. Observem que $f(x)$ serà contínua a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x=-6$ i $x=1$.

Vegem que passa en $x=-6$.

- $f(-6) = \frac{6^2+6-2}{6^2+5\cdot 6-6} = \frac{40}{0} \rightarrow$ No existeix.
- $lim_{x\to\text{-}6} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6} = \frac{40}{0} = \infty \rightarrow$ f presenta una discontinuïtat inevitable essencial en $x=-6$ i, per tant, tampoc serà derivable en aquest punt.

Vegem que passa en $x=1$.

- $f(1) = \frac{1^2+1-2}{1^2+5\cdot 1-6} \rightarrow$ No existeix.
- $lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6} = \frac{0}{0} = lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+6)(x-1)} = lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x+6)} = \frac{3}{7} \rightarrow$ f presenta una discontinuïtat evitable en $x=1$. Per tal d' evitar-la construïm la funció

$$f(x) = \begin{matrix} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \frac{3}{7} & \text{si} \quad x = 1 \end{matrix}$$

D' altra banda, tampoc serà derivable en $x=1$.

(ii) El domini d' aquesta funció són tots els nombres reals. Observem, doncs, que $f(x)$ serà contínua a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x=1$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x=1$

- $f(1) = 1 + 3 = 4$
- $lim_{x\to 1^-} x^2 + 4x - 1$ =4
- $lim_{x\to 1^+} x + 3 = 4$

Per tant, f és contínua en el punt $x = 1$ i, aleshores, podem estudir-ne la seva derivabilitat

- $lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+4x-1-4}{x-1} = lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+4x-5}{x-1} = lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\cdot(x+5)}{x-1}$ $= \lim_{x\to 1^-}(x+5) = 6.$
- $lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^+} \frac{x+3-4}{x-1} = lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = lim_{x\to 1^+} 1 = 1.$

Per tant, f és derivable a tot arreu excepte en el punt $x = 1$ ja que en aquest punt $lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

2.- *Demostra que l'equació $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x = 3$ té almenys una solució en l'interval [0,1].*

Resolució

Sigui $f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 3$ aleshores resulta que,

- f és contínua en $[0, 1]$ ja que és un polinomi.
- $f(1) = 1^4 + 5\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2 + 1 - 3 = 6 > 0$
  $f(0) = 0^4 + 5\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2 + 0 - 3 = -3 < 0.$

Aleshores existeix, pel **teorema de Bolzano,** un punt $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$. És a dir, $c^4 + 5c^3 + 2c^2 + c - 3 = 0$ i, per tant, $c^4 + 5c^3 + 2c^2 + c = 3$

3.-Deriva:

- $f(x) = (x^4 + 5x^2 + 2x - 1)^6 \to f'(x) = 6\cdot(x^4 + 5x^2 + 2x - 1)^5\cdot(4x^3 + 10x + 2)$
- $f(x) = \sin(e^x + 4x - 2)\cdot\ln(x) \to f'(x) \cos(e^x + 4x - 2)\cdot(e^x + 4)\cdot\ln(x) + \frac{1}{x}\cos$ $(e^x + 4x - 2)$
- $f(x) = arctag(\frac{2x-1}{3x+4}) \to f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{2x-1}{3x+4})^2}\cdot\frac{2(3x+4)-3(2x-1)}{(3x+4)^2} = \frac{11}{(1+(\frac{2x-1}{3x+4})^2)(3x+4)^2}$
- $f(x) = ln(4^x - 3x) \to f'(x) = \frac{1}{4^x-3x}(4^x \ln 4 - 3)$

- $f(x) = (x^2+x+3)^{2x-1} \rightarrow ln(f(x)) = ln(x^2+x+3)^{2x-1} \rightarrow ln(f(x)) = (2x-1) \cdot ln(x^2+x+3) \rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f\prime(x) = 2 \cdot ln(x^2+x+3) + \frac{2x+1}{(x^2+x+3)} \cdot (2x-1) \rightarrow f\prime(x) = (2 \cdot ln(x^2+x+3) + \frac{2x+1}{(x^2+x+3)} \cdot (2x-1)) \cdot f(x) \rightarrow f\prime(x) = (2 \cdot ln(x^2+x+3) + \frac{2x+1}{(x^2+x+3)} \cdot (2x-1)) \cdot (x^2+x+3)^{2x-1}$.

4.- *Donada la funció* $f(x) = x^2 + x - 2$

(i) *Troba la recta tangent i normal a la funció en el punt x=3.*

(ii) *Troba la recta tangent a la funció que és paral•lela a y=13x+5.*

Resolució. (i) Recta tangent,

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

$$y - 10 = 7(x-3)$$

$$y = 7x - 11$$

Recta normal,

$$y - f(3) = \frac{-1}{f'(3)}(x-3)$$

$$y - 10 = \frac{-1}{7}(x-3)$$

$$y = \frac{-1}{7}x + \frac{73}{10}$$

(ii) Dues rectes paral·leles tenen el mateix pendent. Per tant,

- El pendent de la recta $y = 13x + 5$ és 13.
- El pendent de la recta tangent a $f(x) = x^2 + x - 2$ en $x = a$ és la derivada→ $f\prime(x) = 2x+1$→ $f\prime(a) = 2a + 1$. Per tant,

$$\begin{aligned} 2a + 1 &= 13 \\ a &= \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

Recta tangent en $x = 6$

$$\begin{aligned} y - f(6) &= f'(6)\cdot(x-6) \\ y - 40 &= 13(x-6) \\ y &= 13x - 38 \end{aligned}$$

Exercici 2. *Troba la monotonia i els extrems relatius de les funcions*

(i)
$$f(x) = 2x^3 - 6x - 4$$

(ii)
$$f(x) = (x+3)e^x$$

(iii)
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$$

Resolució. (i)
$$f(x) = 2x^3 - 6x - 4$$

Observem que aquesta funció és un polinomi i per tant el seu domini seran tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

$f\prime(x) = 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 1 \\ x_2 = \text{-}1 \end{array} \right.$, la qual cosa permet separar la recta real en tres intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

- $f\prime(-2) = 6(-2)^2 - 6 = 18 > 0.$

  $f\prime(0) = 6(0)^2 - 6 = -6 < 0.$

  $f\prime(4) = 3(2)^2 - 6 = 6 > 0.$

Així, doncs, tindrem que f és **creixent** en (-$\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ mentre que és **decreixent** en $(-1, 1)$. Per tant tindrem un màxim $x = -1$ que valdrà $2(-1)^3 - 6(-1) - 4 = 0$ i un mínim en $x = 1$ que valdrà $2(1)^3 - 6(1) - 4 = -8$.

(ii)

$$f(x) = (x+3)e^x$$

Observem que aquesta funció té per domini tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

$f\prime(x) = e^x + (x+3){\cdot}e^x = 0 \rightarrow e^x(x+4) = 0 \rightarrow x = -4$, la qual cosa permet separar la recta real en dos intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

- $f\prime(-5) = e^{-5} - 2{\cdot}e^{-5} = -e^{-5} < 0$.

  $f\prime(0) = e^0 + 3e^0 = 4 > 0$.

Així, doncs, tindrem que f és **decreixent** en (-$\infty, -4)$ mentre que és **creixent** en $(-4, +\infty)$. Per tant tindrem en $x = -4$ un mínim que valdrà $f(-4) = -1{\cdot}e^{-2}$.

(iii)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$$

Observem que aquesta funció té per domini$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

$f\prime(x) = \frac{2x(x^2-9)-2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-18x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$, la qual cosa permet separar la recta real en quatre intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

- $f\prime(-4) > 0$.

  $f\prime(-1) > 0$.

  $f\prime(1) < 0$.

  $f\prime(4) < 0$.

Així, doncs, tindrem f és **creixent** (-$\infty, 0)$ mentre que és **decreixent** en $(0, +\infty)$. Per tant tindrem en $x = 0$ un màxim que valdrà $f(0) = \frac{1}{0^2-9} = -\frac{1}{9}$.