Solucions examen 3

Exercici 1. D*onada la funció*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x + m & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(i) *Estudia la continuïtat en funció dels valors de m.*

(ii) *Estudia la derivabilitat en funció dels valors de m.*

Solució. (i) Observem que $f(x)$ serà contínua i derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 1$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 1$ ja que si $f(x)$ no és contínua en $x = 1$, aleshores ja no podrà ésser derivable en aquest punt.

- $f(2) = 1^2 + 1 - 1 = 1.$
- $lim_{x\to 1^-} x^2 + x - 1 = 1.$
- $lim_{x\to 1^+} x + m = 1 + m.$

Per tant, f és contínua en el punt $x = 1$ si $1 + m = 1 \to m = 0$.

És a dir si $m \neq 1$, aleshores, f presenta una discotinuïtat de salt en $x = 1$ i no caldrà, doncs, estudiar la derivabilitat.

Si $m = 3$ aleshores f serà contínua en $x = 1$ i la funció podrà ser derivable en aquest punt.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- $lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-1-1}{x-1} = lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1} = lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-1}$ $= \lim_{x\to 1^-}(x+2) = 3$
- $lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = lim_{x\to 1^+} 1 = im_{x\to 1^+} 1 = 1.$

Per tant, f és derivable a tot arreu excepte en el punt $x = 1$ ja que en aquest punt $lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ i la seva derivada val

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Exercici 2. *Troba la monotonia i els extrems relatius de les funcions*

(i)
$$f(x) = x^3 - 27x - 4$$

(ii)
$$f(x) = (x+1)e^x$$

(iii)
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$$

Resolució. (i)
$$f(x) = x^3 - 27x - 4$$

Observem que aquesta funció és un polinomi i per tant el seu domini seran tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

$f\prime(x) = 3x^2 - 27 = 0 \to 3x^2 - 27 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \text{-}3 \end{cases}$, la qual cosa permet separar la recta real en tres intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

- $f\prime(-4) = 3(-4)^2 - 27 = 21 > 0.$
  $f\prime(0) = 3(0)^2 - 27 = -27 < 0.$
  $f\prime(4) = 3(4)^2 - 27 = 21 > 0.$

Així, doncs, tindrem que f és **creixent** en (-$\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ mentre que és **decreixent** en $(-3, 3)$. Per tant tindrem un màxim $x = -3$ que valdrà $(-3)^3 - 27(-3) - 4 = 50$ i un mínim en $x = 3$ que valdrà $(3)^3 - 27\cdot 3 - 4 = -.58$

(ii)
$$f(x) = (x+1)e^x$$

Observem que aquesta funció té per domini tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

$f\prime(x) = e^x + (x+1)\cdot e^x = 0 \to e^x(x+2) = 0 \to x = -2$, la qual cosa permet separar la recta real en dos intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

- $f\prime(-3) = e^{-3} - 2\cdot e^{-3} = -e^{-3} < 0.$
  $f\prime(0) = e^0 + e^0 = 2 > 0.$

Així, doncs, tindrem que f és **decreixent** en $(-\infty, -2)$ mentre que és **creixent** en $(-2, +\infty)$. Per tant tindrem en $x = -2$ un mínim que valdrà $f(-2) = -1\cdot e^{-2}$.

(iii)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Observem que aquesta funció té per domini$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

$f\prime(x) = \frac{2x(x^2-4)-2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-8x}{(x^2-1)^2} = 0 \to x = 0$, la qual cosa permet separar la recta real en quatre intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

- $f\prime(-3) = \frac{-8\cdot(-3)}{((-3)^2-4)^2} = \frac{24}{25} > 0.$
  $f\prime(-1) = \frac{-8\cdot(-1)}{((-1)^2-4)^2} = \frac{8}{9} > 0.$
  $f\prime(0,5) = \frac{-8\cdot(1)}{((1)^2-4)^2} = \frac{-8}{9} < 0.$
  $f\prime(3) = \frac{-8\cdot 3}{(3^2-4)^2} = \frac{-24}{25} < 0.$

Així, doncs, tindrem f és **creixent** $(-\infty, 0)$ mentre que és **decreixent** en $(0, +\infty)$. Per tant tindrem en $x = 0$ un màxim que valdrà $f(0) = \frac{1}{0^2-4} = -\frac{1}{4}$.

Exercici 3. *Calcula les següents derivades*

- $f(x) = (5x^2 + 3\ln x)^5 \to f'(x) = 5(5x^2 + 3\ln x)^4\cdot(10x + \frac{3}{x})$

- $f(x) = 4^{x^2+3x-2} \rightarrow f'(x) = 4^{x^2+3x-2} \cdot (2x+3) \cdot ln4$
- $f(x) = e^{3x+4} \cdot (2x+3)^2 \rightarrow f'(x) = e^{3x+4} \cdot 3 \cdot (2x+3)^2 + 2(2x+3) \cdot 2 \cdot e^{3x+4}$
- $f(x) = \frac{x^3+2x-2}{x+2} \rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2+2)\cdot(x+2)-(x^3+2x-2)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+6x^2+2}{(x+2)^2}$
- $f(x) = \ln(2x-3) \rightarrow f\prime(x) = \frac{1}{2x-3} \cdot 2$
- $f(x) = x^3 + 5x^2 - \sqrt[7]{x^5} \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 10x - \frac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$

Exercici 4. *Donada la funció* $f(x) = 3x^2 + x - 2$

(i) *Troba la recta tangent i nomal a la funció en* $x = 1$

(ii) *Troba la recta tangent a la funció que és paral·lela a* $y = 13x + 5$

Resolució. (i)

$$f(1) = 3(1)^2 + 1 - 2 = 2$$
$$f'(x) = 6x + 1 \rightarrow \ f\prime(1) = 7$$

La recta tangent és

$$\begin{aligned} y - f(1) &= f'(1) \cdot (x-1) \\ y - 2 &= 7(x-1) \\ y &= 7x - 5 \end{aligned}$$

La recta normal pren la forma

$$\begin{aligned} y - f(1) &= \frac{-1}{f'(1)} \cdot (x-1) \\ y - 2 &= \frac{-1}{7}(x-1) \\ y &= \frac{-1}{7}x + \frac{1}{7} + 2 \\ y &= \frac{-1}{7}x + \frac{15}{7} \end{aligned}$$

(ii) Dues rectes paral·leles tenen el mateix pendent. Per tant,

- El pendent de la recta $y = 13x + 5$ és 13.

- El pendent de la recta tangent a $f(x) = 3x^2 + x - 2$ en $x = a$ és la derivada$\rightarrow$ $f\prime(x) = 6x{+}1\rightarrow$ $f\prime(a) = 6a + 1$. Per tant,

$$\begin{aligned} 6a + 1 &= 13 \\ a &= \frac{12}{6} = 2 \end{aligned}$$

Recta tangent en x=2

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2){\cdot}(x - 2) \\ y - 12 &= 13(x - 2) \\ y &= 13x - 14 \end{aligned}$$