Solucions examen 2

1.- *Troba la derivada de la funció* $f(x) = x^2 - 3$ *en el punt d' abscissa x=2 a partir de la definició.*

Solució: f'(2)$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) =$ 4.

2.- D*onada la funció*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(i) *Estudia la continuïtat en funció dels valors de a.*

(ii) *Estudia la derivabilitat en funció dels valors de a.*

(iii) *Calcula la derivada en cas que sigui possible.*

Solució. (i) Observem que $f(x)$ serà contínua i derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 2$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 2$ ja que si $f(x)$ no és contínua en $x = 2$, aleshores ja no podrà ésser derivable en aquest punt.

- $f(2) = 2^2 + a\cdot 2 - 2 = 2a + 2.$
- $lim_{x\to 2^-} x^2 + ax - 2 = 2a + 2.$
- $lim_{x\to 2^+} 3x + 2 = 8.$

Per tant, f és contínua en el punt $x = 2$ si $2a + 2 = 8 \to a = 3$.

És a dir si $a \neq 3$, aleshores, f presenta una discotinuïtat de salt en $x = 2$ i no caldrà, doncs, estudiar la derivabilitat.

Si $a = 3$ aleshores f serà contínua en $x = 2$ i la funció podrà ser derivable en aquest punt.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

- $lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+3x-2-8}{x-2}=lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\cdot(x+5)}{x-2}$ $=\lim_{x\to 2^-}(x+5)=7.$
- $lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=lim_{x\to 2^+}\frac{3x+2-8}{x-2}=lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-2}=lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}=3.$

Per tant, f és derivable a tot arreu excepte en el punt $x=2$ ja que en aquest punt $lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

(iii)

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x<2 \\ 3 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

3.- Derivades

- $f(x)=\sqrt[5]{x^2}+4x^3-2x+1\to f'(x)=\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}+12x^2-2$
- $f(x)=(x^2+3x-2)\cdot lnx\to f\prime(x)=(2x+3)\cdot lnx+\frac{1}{x}\cdot(x^2+3x-2)$
- $f(x)=\frac{x^3+2x-2}{x+2}\to f'(x)=\frac{(3x^2+2)\cdot(x+2)-(x^3+2x-2)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+6x^2+2}{(x+2)^2}$
- $f(x)=e^x\cdot lnx\to f'(x)=e^x\cdot\text{lnx}+\frac{1}{x}e^x$
- $f(x)=4^x\cdot(e^x-1)\to f'(x)=4^x\ln 4\cdot(\text{e}^x-1)+e^x\cdot 4^x$
- $f(x)=x^2+3x-\log_3 x\to f'(x)=2x+3-\frac{1}{x\ln 3}$
- $f(x)=(x^2+3x-1)^4\to f'(x)=4(x^2+3x-1)^3\cdot(2x+3)$
- $f(x)=\ln(e^x-1)\to f\prime(x)=\frac{1}{(e^x-1)}\cdot e^x$
- $f(x)=e^{x^3+2x-1}\to f'(x)=e^{x^3+2x-1}\cdot(3x^2+2)$
- $f(x)=4^{x^2+2x-1}\to f'(x)=4^{x^2+2x-1}\cdot(2x+2)\cdot ln4$
- $f(x)=\log_4(2x-3)\to f'(x)=\frac{1}{2x-3}\cdot 2\cdot\frac{1}{\ln 4}$
- $f(x)=\sqrt{x^2+2x-1}\to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-1}}\cdot(2x+2)$