Solucions examen 1

1.- Estudia la continuïtat de la funció següent, en funció dels valors del paràmetre k

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x-2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ kx+3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solució. Observem que $f(x)$ serà contínua a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 2$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 2$

- $f(2) = 2^2 + 3{\cdot}2{-}2 = 8$.
- $lim_{x \to 2^-} x^2 + 3x - 2$ =8
- $lim_{x \to 2^+} kx + 3 = 2k + 3$.

Per tant, f és contínua en el punt $x = 2$ si $2k + 3 = 8 \to k = \frac{5}{2}$.

És a dir si $k \neq \frac{5}{2}$ aleshores f presenta una discontinuïtat inevitable de salt en $x = 2$.

Si $k = \frac{5}{2}$ aleshores f és contínua en $x = 2$.

2.- Estudia la continuïtat de les funcions

(i) $\quad f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}$

(ii) $\quad f(x) = \begin{cases} 4x^2+2x-3 & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x+5 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

(i) El domini de la funció $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}$ és $D = \mathbb{R} \backslash \{1, -2\}$. Observem que $f(x)$ serà contínua a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = -2$ i $x = 1$.

- $f(-2) = \frac{(-2)^2+3(-2)-4}{(-2)^2-2-2} \to$ No existeix.
- $lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2} = \frac{6}{0} = \infty \to$ f presenta una discontinuïtat inevitable essencial en $x = -2$.
- $f(1) = \frac{(1)^2+3(1)-4}{(1)^2+1-2} \to$ No existeix.

- $lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2} = \frac{0}{0} = lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = lim_{x \to 1} \frac{(x+4)}{(x+2)} = \frac{5}{3} \to$ f presenta una discontinuïtat evitable en $x = 1$. Per tal d' evitar-la construïm la funció

$$f(x) = \begin{matrix} \frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2} & \text{si} & x \neq 1 \\ \frac{5}{3} & \text{si} & x = 1 \end{matrix}$$

(ii) Observem que $f(x)$ serà contínua a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 3$

- $f(3) = 4{\cdot}3^2 + 2{\cdot}3 - 3 = 39.$
- $lim_{x \to 3^-} 4x^2 + 2x - 3 = 39.$
- $lim_{x \to 3^+} 2x + 5 = 11.$

Per tant, f presenta una discontinuïtat inevitable de salt en el punt $x = 1$.

3.- Demostra que l'equació $x^3 + 2x^2 + 3x = 5$ té almenys una solució en l'interval [0,1].

Sigui $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ aleshores resulta que,

- f és contínua en $[0, 1]$ ja que és un polinomi.
- $f(1) = 1^3 + 2{\cdot}1^2 + 3{\cdot}1 - 5 = 1 > 0$
  $f(0) = 0^3 + 2{\cdot}0^2 + 3{\cdot}0 - 5 = -5 < 0.$

Aleshores existeix, pel **teorema de Bolzano,** un punt $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$. És a dir, $c^3 + 2c^2 + 3c - 5 = 0$ i, per tant, $c^3 + 2c^2 + 3c = 5$.

4.- Calcula els següents límits

(i) $\lim_{x \to +\infty} (\frac{2x-1}{2x+3})^{3x-4}$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - x$

(iii) $im_{x \to 0} \frac{4x^3+7x^2-2x}{3x^2+7x}$

- $\lim_{x \to +\infty} (\frac{2x-1}{2x+3})^{3x-4} = \lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{2x-1}{2x+3} - 1)^{3x-4} = \lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{-4}{2x+3})^{3x-4} = \lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-4}})^{3x-4} = \lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-4}})^{\frac{2x+3}{-4} \frac{4}{-2x+3} 3x-4} = \mathrm{e}^{\lim_{x \to +\infty} \frac{12x-16}{2x+3}} = \mathrm{e}^6$
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3}-x) \cdot (\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$
- $lim_{x \to 0} \frac{4x^3+7x^2-2x}{3x^2+7x} = lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (4x^2+7x-2)}{x \cdot (3x+7)} = lim_{x \to 0} \frac{(4x^2+7x-2)}{(3x+7)} = \frac{-2}{7}$