1.2 Funcions derivables.

Definició 1.4. Sigui $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció. Aleshores, direm que f és *derivable* en un punt $x = a$ si compleix,

$$l\acute{\imath}m_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l\acute{\imath}m_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

d'aquesta manera, anomenarem *derivada* de $f(x)$ en el punt $x = a$,

$$f'(a) = lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si fem el canvi de variable$x = a + h$ obtindrem una fórmula equivalentment,

$$l\acute{\imath}m_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l\acute{\imath}m_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

d'aquesta manera, anomenarem derivada de $f(x)$ en el punt $x = a$,

$$f\prime(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple 1.5. Troba la derivada de la funció$f(x) = x^2 + x - 1$ en el punt $x = 2$.

- $f\prime(2) = lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-1-5}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+3)\cdot(x-2)}{x-2}$ $= \lim_{x\to 2}(x+3) = 5.$

Observem que, *tota funció derivable és contínua* ja que com que existeix $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ha de succeir, aleshores, que $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{0}{0}$ i per tant $lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0$ i d'aquesta manera $lim_{x\to a}f(x) = f(a)$, que justament és la condició de continuïtat en el punt $x = a$.

Exemple 1.6. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. Estudia'n la seva derivabilitat.

Observem que $f(x)$ serà derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 0$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 0$ ja que si $f(x)$ no és contínua en $x = 0$, aleshores ja no podrà ésser derivable en aquest punt.

- $f(0) = 0^2 + 3\cdot 0 - 2 = -2.$

- $lim_{x\to 0^-} x^2+3x-2=-2$.
- $lim_{x\to 0^+} 2x-2=-2$.

Per tant, f és contínua en el punt $x=0$ i d'aquesta manera té sentit estudiar-ne la derivabilitat en aquest punt,

- $lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3x-2+2}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3x}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x\cdot(x+3)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}(x+3)=3$.
- $lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{2x-2+2}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} = 2$.

Per tant, f és derivable a tot arreu excepte en el punt $x=0$ ja que en aquest punt $lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Exemple 1.7. Donada la funció $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2+2x-8 & \text{si} & x\leq 0 \\ 2x-8 & \text{si} & x>0 \end{array} \right.$. Estudia'n la seva derivabilitat.

Observem que $f(x)$ serà derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x=0$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x=0$ ja que si $f(x)$ no és contínua en $x=0$, aleshores ja no podrà ésser derivable en aquest punt.

- $f(0) = 0^2+2\cdot 0-8=-8$.
- $lim_{x\to 0^-} x^2+2x-8=-8$.
- $lim_{x\to 0^+} 2x-8=-8$.

Per tant, f és contínua en el punt $x=0$ i d'aquesta manera té sentit estudiar-ne la derivabilitat en aquest punt,

- $lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x-8+8}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x}{x-0} = lim_{x\to 0^-} \frac{x\cdot(x+2)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}(x+2)=2$.
- $lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{2x-8+8}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} = 2$.

Per tant, f és derivable, també en el punt $x=0$ ja que $lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

1.3 Taules de derivades.

Fins, ara, hem avaluat la derivada d'una funció en un punt $x = a$ concret. Imaginem, però, que nosaltres volem calcular la derivada d'una funció no en un punt concret, si no en un punt genèric x. Aleshores tindrem la taula de derivades,

$$\begin{array}{ll} f(x) = k & f\prime(x) = 0 \\ f(x) = x & f\prime(x) = 1 \\ f(x) = x^n & f\prime(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = \ln x & f\prime(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = e^x & f\prime(x) = e^x \\ f(x) = sinx & f\prime(x) = cosx \\ f(x) = cosx & f\prime(x) = -sinx \\ f(x) = tagx & f\prime(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \\ f(x) = arc\sin x & f\prime(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) = \arccos x & f\prime(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) = arctagx & f\prime(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

A més a més, les principals propietats que trobem pel què fa a les derivades són:

- $(f+g)\prime(x) = f\prime(x) + g\prime(x)$
- $(f-g)\prime(x) = f\prime(x) - g\prime(x)$
- $(f \cdot g)\prime(x) = f\prime(x) \cdot g(x) + g\prime(x) \cdot f(x)$
- $.(kf)\prime(x) = k \cdot f\prime(x)$
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f\prime(x) \cdot g(x) - g\prime(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$

Exemples:

- $f(x) = x^3 \rightarrow f\prime(x) = 3x^2$
- $f(x) = 4x^2 \rightarrow f\prime(x) = 4 \cdot 2x = 8x$
- $f(x) = x^2 + 3x \rightarrow f\prime(x) = 2x + 3$
- $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \rightarrow f\prime(x) = 15x^2 + 8x - 3$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f\prime(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f\prime(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = (x^2+3x-1)\cdot sinx \rightarrow f\prime(x) = (2x+3)\cdot sinx + (x^2+3x-1)\cdot cosx$
- $f(x) = e^x\cdot sinx \rightarrow f\prime(x) = e^x\cdot sinx + cosx\cdot e^x$
- $f(x) = (x^2+3x)\cdot lnx \rightarrow f\prime(x) = (2x+3)\cdot lnx + \frac{1}{x}\cdot(x^2+3x)$
- $f(x) = (x^2+3x-2)\cdot cosx \rightarrow f\prime(x) = (2x+3)\cdot cosx - sinx\cdot(x^2+3x-2)$.
- $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1} \rightarrow f\prime(x) = \frac{2\cdot(3x-1)-3\cdot(2x+3)}{(3x-1)^2} = \frac{-11}{(3x-1)^2}$
- $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2} \rightarrow f\prime(x) = \frac{1(x^2-3x+2)-(2x-3)\cdot(x+3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-x^2-6x+11}{(x^2-3x+2)^2}$
- $f(x) = \frac{e^x-1}{\sin x} \rightarrow f\prime(x) = \frac{e^x sinx - cosx\cdot(e^x-1)}{(\sin x)^2}$
- $f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \rightarrow f\prime(x) = \frac{2e^x-(2x-1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-2xe^x+3e^x}{e^{2x}}$

Vegem també la demostració d'algunes de les propietats més importants que hem citat anteriorment.

- *(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)*
  $(f+g)\prime(a) = lim_{x\rightarrow a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
  $+lim_{x\rightarrow a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a)$
- *(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)*
  $(f-g)\prime(a) = lim_{x\rightarrow a}\frac{(f-g)(x)-(f-g)(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)-g(x)-f(a)+g(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
  $-lim_{x\rightarrow a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)-g'(a)$
- *(f·g)'(x)=f'(x)·g(x)+g'(x)·f(x)*
  $(f\cdot g)\prime(a) = lim_{x\rightarrow a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} =$
  $lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(a)-f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(a)}{x-a}$
  $+\ lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)\cdot(g(x)-\cdot g(a))}{x-a} + lim_{x\rightarrow a}\frac{(f(x)\cdot - f(a))\cdot g(a)}{x-a} =$
  $f\prime(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g\prime(a)$
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x)\text{-}g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$
  $(\frac{f}{g})(a) = lim_{x\rightarrow a}\frac{\frac{f}{g}(x)\text{-}\frac{f}{g}(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(a)}{x-a} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)} =$
  $lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g(a)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)} = lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)} +$
  $lim_{x\rightarrow a}\frac{-f(a)\cdot g(x)+f(a)\cdot g(a)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)} = \frac{f\prime(a)\cdot g(a)-g\prime(a)\cdot f(a)}{(g(a))^2}$

Siguin $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions derivables tals que $Img \subset Domf$. Considerem l'aplicació $h(x) = fog(x) = f(g(x))$. Aleshores,

$$h\prime(x) = f\prime(g(x))\cdot g\prime(x)$$

En efecte, sigui $h(x) = fog(x) = f(g(x))$, aleshores tindrem que $h\prime(x) = lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{g(x)-g(a)} = lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f\prime(g(x))\cdot g\prime(x)$. Com a conseqüència d'aquest resultat tenim una nova taula de derivades,

$$\begin{array}{ll}
f(x) = (f(x))^n & f\prime(x) = n(f(x))^{n-1}\cdot f\prime(x) \\
f(x) = \ln f(x) & f\prime(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \\
f(x) = e^{f(x)} & f\prime(x) = e^{f(x)}\cdot f\prime(x) \\
f(x) = \sin f(x) & f\prime(x) = \cos f(x)\cdot f\prime(x) \\
f(x) = \cos f(x) & f\prime(x) = -\sin f(x)\cdot f\prime(x) \\
f(x) = tag f(x) & f\prime(x) = \frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f\prime(x) \\
f(x) = arc\sin f(x) & f\prime(x) = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f\prime(x) \\
f(x) = \arccos f(x) & f\prime(x) = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f\prime(x) \\
f(x) = arctag f(x) & f\prime(x) = \frac{1}{1+f(x)^2}\cdot f'(x)
\end{array}$$

Exemples:

- $f(x) = (x^2+3x-2)^4 \to f\prime(x) = 4\cdot(x^2+3x-2)^3\cdot(2x+3)$
- $f(x) = (sinx+6)^2 \to f\prime(x) = 2\cdot(sinx+6)\cdot cosx$
- $f(x) = ln(x^4+3x^2+2) \to f\prime(x) = \frac{1}{x^4+3x^2+2}\cdot(4x^3+6x)$
- $f(x) = sin(x^3+1) \to f\prime(x) = cos(x^3+1)\cdot 3x^2$
- $f(x) = e^{sinx} \to f\prime(x) = e^{sinx}\cdot cosx$
- $f(x) = ln(1+sinx) \to f\prime(x) = \frac{1}{1+sinx}\cdot cosx$
- $f(x) = arcsin(x^3-1) \to f\prime(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3-1)^2}}\cdot 3x^2$
- $f(x) = ln(\frac{x+2}{x-1}) \to f\prime(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)}$
- $f(x) = cos(sin(x^2-3)) \to f\prime(x) = -sin(sin(x^2-3))\cdot cos(x^2-3)\cdot 2x$

- $f(x) = cos(\sqrt{x^2-3}) \rightarrow f\prime(x) = -sin(\sqrt{x^2\text{-}3})\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-3}}\cdot 2x = \frac{\text{-}x\cdot sin\cdot(\sqrt{x^2-3})}{\sqrt{x^2\text{-}3}}$
- $f(x) = sin(6x^3)^2 \rightarrow f\prime(x) = cos(6x^3)^2\cdot 2\cdot 6x^3\cdot 18x^2 = 216\cdot x^5\cdot cos(6x^3)^2$
- $f(x) = sin^2(6x^3) \rightarrow f\prime(x) = 2\cdot sin(6x^3)\cdot cos(6x^3)\cdot 18x^2 = 36\cdot x^2\cdot sin(12x^3)$
- $f(x) = ln(\sqrt{x^2+1}) \rightarrow f\prime(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}$
- $f(x) = 4^{x^3+4x^2-3x+5} \rightarrow f\prime(x) = 4^{x^3+4x^2-3x+5}\cdot(3x^2+8x-3)\cdot ln4$
- $f(x) = ln(\frac{3x-2}{2x-8}) \rightarrow f\prime(x) = \frac{1}{\frac{3x-2}{2x-8}}\cdot\frac{3\cdot(2x-8)-2\cdot(3x-2)}{(2x-8)^2} = \frac{-20}{(3x-2)\cdot(2x-8)}$
- $f(x) = \frac{ln(x^3-2x)}{x^2+3} \rightarrow f\prime(x) = \frac{\frac{1}{x^3-2x}\cdot(3x^2-2)\cdot(x^2+3)-2x\cdot ln(x^3-2x)}{(x^2+3)^2}$

1.4 Interpretació geomètrica de la derivada

Sigui $y = f(x)$ una funció contínua i derivable en un interval [c,d] de la recta real. Considerem els punts de la corba $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

$$\begin{cases} AB = B - A = (b-a, f(b)-f(a)) \\ \qquad A(a, f(a)) \end{cases}$$

Aleshores la recta que passa pels punts A i B és $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} \Longrightarrow y - f(a) = (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})\cdot(x-a)$.

Si apropem el punt B cap al punt A , per un altre punt Z, tindrem per recta,

$$y - f(a) = (\frac{f(z)-f(a)}{z-a})\cdot(x-a)$$

Finalment fent tendir Z cap al punt A, obtindrem la *recta tangent* de la funció $y = f(x)$ en el punt $x = a$, que donarà,

$$y - f(a) = lim_{z\to a}(\frac{f(z)-f(a)}{z-a})\cdot(x-a).$$

i per tant, la *recta tangent a f(x) en el punt x=a* serà,

$$y - f(a) = f\prime(a)\cdot(x-a)$$