

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si fem el canvi de variable $x = a + h$ obtindrem una fórmula equivalentment,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

d'aquesta manera, anomenarem derivada de $f(x)$ en el punt $x = a$,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple 1.8. Troba la derivada de la funció $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punt $x = 2$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5. \end{aligned}$$

Observem que, *tota funció derivable és contínua* ja que com que existeix

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, ha de succeir, aleshores, que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0}{0}$ i per tant $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ i d'aquesta manera $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, que justament és la condició de continuïtat en el punt $x = a$.

Exemple 1.9. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Estudia'n la seva derivabilitat.

Observem que $f(x)$ serà derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 0$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 0$ ja que si $f(x)$ no és contínua en $x = 0$, aleshores ja no podrà ésser derivable en aquest punt.

- $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 3x - 2 = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 2 = -2$.

Per tant, f és contínua en el punt $x = 0$ i d'aquesta manera té sentit estudiar-ne la derivabilitat en aquest punt,

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+3x-2+2}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+3x}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (x+3)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+3) = 3.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-2+2}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2.$

Per tant, f és derivable a tot arreu excepte en el punt $x = 0$ ja que en aquest punt $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$

Exemple 1.10. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 8 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$ Estudia'n la seva derivabilitat.

Observem que $f(x)$ serà derivable a tot arreu excepte, pot ser, en el punt $x = 0$. Comencem per estudiar la continuïtat de $f(x)$ en el punt $x = 0$ ja que si $f(x)$ no és contínua en $x = 0$, aleshores ja no podrà ésser derivable en aquest punt.

- $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = -8.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x - 8 = -8.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 8 = -8.$

Per tant, f és contínua en el punt $x = 0$ i d'aquesta manera té sentit estudiar-ne la derivabilitat en aquest punt,

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+2x-8+8}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+2x}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (x+2)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 2.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-8+8}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2.$

Per tant, f és derivable, també en el punt $x = 0$ ja que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$

1.3 Taules de derivades.

Fins, ara, hem avaluat la derivada d'una funció en un punt $x = a$ concret. Imaginem, però, que nosaltres volem calcular la derivada d'una funció no en un punt

concret, si no en un punt genèric x . Aleshores tindrem la taula de derivades,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= k & f'(x) &= 0 \\
 f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\
 f(x) &= x^n & f'(x) &= nx^{n-1} \\
 f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} \\
 f(x) &= e^x & f'(x) &= e^x \\
 f(x) &= \sin x & f'(x) &= \cos x \\
 f(x) &= \cos x & f'(x) &= -\sin x \\
 f(x) &= \operatorname{tag} x & f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
 f(x) &= \operatorname{arc} \sin x & f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 f(x) &= \operatorname{arccos} x & f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 f(x) &= \operatorname{arctag} x & f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

A més a més vegem alguna demostració de les principals derivades:

- $f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{k - k}{x - a} = 0$$
- $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$
- $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{(x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = n \cdot a^{n-1} \end{aligned}$$
- $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{2a+h}{2}}{h} = \cos \frac{2a}{2} = \cos a.$$
- $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2a+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} = -\sin \frac{2a}{2} = -\sin a.$$
- $f(x) = \operatorname{tag} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$f(x) = \operatorname{tag} x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

A més a més, les principals propietats que trobem pel què fa a les derivades són:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

- $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
- $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$

Exemples:

- $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$
- $f(x) = 4x^2 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot 2x = 8x$
- $f(x) = x^2 + 3x \rightarrow f'(x) = 2x + 3$
- $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \rightarrow f'(x) = 15x^2 + 8x - 3$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = (x^2 + 3x - 1) \cdot \sin x \rightarrow f'(x) = (2x + 3) \cdot \sin x + (x^2 + 3x - 1) \cdot \cos x$
- $f(x) = e^x \cdot \sin x \rightarrow f'(x) = e^x \cdot \sin x + \cos x \cdot e^x$
- $f(x) = (x^2 + 3x) \cdot \ln x \rightarrow f'(x) = (2x + 3) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 3x)$
- $f(x) = (x^2 + 3x - 2) \cdot \cos x \rightarrow f'(x) = (2x + 3) \cdot \cos x - \sin x \cdot (x^2 + 3x - 2)$
- $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (3x-1) - 3 \cdot (2x+3)}{(3x-1)^2} = \frac{-11}{(3x-1)^2}$
- $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2} \rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2-3x+2) - (2x-3) \cdot (x+3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-x^2-6x+11}{(x^2-3x+2)^2}$
- $f(x) = \frac{e^x-1}{\sin x} \rightarrow f'(x) = \frac{e^x \sin x - \cos x \cdot (e^x-1)}{(\sin x)^2}$
- $f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \rightarrow f'(x) = \frac{2e^x - (2x-1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-2xe^x + 3e^x}{e^{2x}}$

Vegem també la demostració d'algunes de les propietats més importants que hem citat anteriorment.

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
 $(f+g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
 $(f-g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f-g)(x) - (f-g)(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x) - f(a) + g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) - g'(a)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
 $(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(a) - f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a)}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot (g(x) - g(a))}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(a)}{x-a} = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$
 $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(a) - g'(a) \cdot \frac{f(a) - f(x)}{x-a}}{(g(x))^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(a)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x-a)} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{(g(a))^2}$

Suposem $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions derivables tals que $\text{Im}g \subset \text{Dom}f$. Considerem l'aplicació $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$. Aleshores,

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En efecte, sigui $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$, aleshores tindrem que $h'(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Observem que com a conseqüència de la regla de la cadena podrem trobar les derivades de les funcions $\arcsin x$, $\arccos x$ i $\arctan x$.

- $\sin(\arcsin x) = x \rightarrow \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1 \rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- $\cos(\arccos x) = x \rightarrow -\sin(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1 \rightarrow (\arccos x)' = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $\text{tag}(\text{arctag} x) = x \rightarrow \frac{1}{\cos^2(\text{arctag} x)} = \frac{1}{1+\text{tag}^2(\text{arctag} x)} = \frac{1}{1+x^2}$

També, gràcies a la regla de la cadena tenim una nova taula de derivades,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (f(x))^n & f'(x) &= n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x) \\
 f(x) &= \ln f(x) & f'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\
 f(x) &= e^{f(x)} & f'(x) &= e^{f(x)} \cdot f'(x) \\
 f(x) &= \sin f(x) & f'(x) &= \cos f(x) \cdot f'(x) \\
 f(x) &= \cos f(x) & f'(x) &= -\sin f(x) \cdot f'(x) \\
 f(x) &= \text{tag} f(x) & f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) \\
 f(x) &= \arcsin f(x) & f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x) \\
 f(x) &= \arccos f(x) & f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x) \\
 f(x) &= \text{arctag} f(x) & f'(x) &= \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)
 \end{aligned}$$

Exemples:

- $f(x) = (x^2 + 3x - 2)^4 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot (x^2 + 3x - 2)^3 \cdot (2x + 3)$
- $f(x) = (\sin x + 6)^2 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot (\sin x + 6) \cdot \cos x$
- $f(x) = \ln(x^4 + 3x^2 + 2) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2} \cdot (4x^3 + 6x)$
- $f(x) = \sin(x^3 + 1) \rightarrow f'(x) = \cos(x^3 + 1) \cdot 3x^2$
- $f(x) = e^{\sin x} \rightarrow f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$
- $f(x) = \ln(1 + \sin x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \cos x$
- $f(x) = \arcsin(x^3 - 1) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3-1)^2}} \cdot 3x^2$
- $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)}$
- $f(x) = \cos(\sin(x^2 - 3)) \rightarrow f'(x) = -\sin(\sin(x^2 - 3)) \cdot \cos(x^2 - 3) \cdot 2x$
- $f(x) = \cos(\sqrt{x^2 - 3}) \rightarrow f'(x) = -\sin(\sqrt{x^2 - 3}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot 2x = \frac{-x \cdot \sin(\sqrt{x^2 - 3})}{\sqrt{x^2 - 3}}$

- $f(x) = \sin(6x^3)^2 \rightarrow f'(x) = \cos(6x^3)^2 \cdot 2 \cdot 6x^3 \cdot 18x^2 = 216 \cdot x^5 \cdot \cos(6x^3)^2$
- $f(x) = \sin^2(6x^3) \rightarrow f'(x) = 2 \cdot \sin(6x^3) \cdot \cos(6x^3) \cdot 18x^2 = 36 \cdot x^2 \cdot \sin(12x^3)$
- $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1}) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + 1}$
- $f(x) = 4^{x^3 + 4x^2 - 3x + 5} \rightarrow f'(x) = 4^{x^3 + 4x^2 - 3x + 5} \cdot (3x^2 + 8x - 3) \cdot \ln 4$
- $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{2x-8}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{3x-2}{2x-8}} \cdot \frac{3 \cdot (2x-8) - 2 \cdot (3x-2)}{(2x-8)^2} = \frac{-20}{(3x-2) \cdot (2x-8)}$
- $f(x) = \frac{\ln(x^3 - 2x)}{x^2 + 3} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x^3 - 2x} \cdot (3x^2 - 2) \cdot (x^2 + 3) - 2x \cdot \ln(x^3 - 2x)}{(x^2 + 3)^2}$
- $f(x) = \arcsin(2x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$
- $f(x) = \ln(\arcsin e^x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\arcsin e^x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot e^x = \frac{e^x}{\arcsin e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}}}$

Finalment, l'última classe de derivació que tractarem és la derivació logarítmica. Sigui $y = (f(x))^{g(x)}$ una funció. Anem a calcular la seva derivada

$$y = (f(x))^{g(x)}$$

$$\ln y = \ln(f(x))^{g(x)}$$

$$\ln y = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot g(x)$$

$$y' = y \cdot (g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot g(x)) = (f(x))^{g(x)} \cdot (g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot g(x)).$$

Per tant,

$$((f(x))^{g(x)})' = (f(x))^{g(x)} \cdot (g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot g(x))$$

Exemples:

- $f(x) = x^x \rightarrow \ln(f(x)) = \ln x^x = x \cdot \ln x \rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln x + 1 \rightarrow f'(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x$
- $f(x) = (\sin x + 3)^{x+2} \rightarrow \ln(f(x)) = \ln(\sin x + 3)^{x+2} \rightarrow \ln(f(x)) = (x + 2) \cdot \ln(\sin x + 3) \rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(\sin x + 3) + \frac{\cos x}{\sin x + 3} \cdot (x + 2)$
 $\rightarrow f'(x) = (\sin x + 3)^{x+2} \cdot (\ln(\sin x + 3) + \frac{\cos x}{\sin x + 3} \cdot (x + 2))$