Aplicació de les derivades.

Creixement i decreixement d'una funció.

Definició 1. Sigui $y = f(x)$ una funció direm que aquesta funció és *creixent* en un interval $[a, b]$ si $\forall x, y \in [a, b]$ amb $x \leq y$ aleshores $f(x) \leq f(y)$.

Definició 2. Sigui $y = f(x)$ una funció direm que aquesta funció és *decreixent* en un interval $[a, b]$ si $\forall x, y \in [a, b]$ amb $x \leq y$ aleshores $f(x) \geq f(y)$.

Teorema de monotonia: *(i) Sigui $y = f(x)$ una funció contínua i derivable aleshores $f\prime > 0$ al voltant d'un punt $x = a$ si i només si f és creixent al voltant del punt $x = a$.*

(ii) *Sigui $y = f(x)$ una funció contínua i derivable aleshores $f\prime < 0$ al voltant d'un punt $x = a$ si i només si f és decreixent al voltant del punt $x = a$.*

Demostració. Suposem que $f(x)$ és una funció contínua i derivable al voltant del pnt $x = a$ complint $f\prime(a) > 0$. Aleshores, si apliquem la definició de derivada tindrem:

- $lim_{\mathrm{h}\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f\prime(a) > 0$ i per tant, com que h és positiva, $f(a+h) - f(a) > 0$ ja que en cas contrari $f\prime(a) < 0$. Per tant, $f(a+h) - f(a) > 0 \to f(a+h) > f(a)$.

Per altra banda,

- $lim_{\mathrm{h}\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = lim_{\mathrm{h}\to 0^+} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = f\prime(a) > 0$ i per tant com que $-h$ és negativa, $f(a-h) - f(a) < 0$ ja que en cas contrari $f\prime(a) < 0$. Per tant $f(a-h) - f(a) < 0 \to f(a-h) < f(a)$.

Així, doncs, tindrem la cadena de desigualtats:

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h)$$

D' aquesta manera, f és creixent.

Recíprocament si f és una funció creixent en el punt $x = a$ existeix un $h > 0$ tal que $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$. Per tant, $f\prime(a^-) = lim_{\text{h}\to 0^+} \frac{f(a-h)-f(a)}{-\text{h}} = lim_{\text{h}\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{\text{h}} \geq 0$ i $f\prime(a^+) = lim_{\text{h}\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{\text{h}} \geq 0$. Així doncs $f\prime(a) \geq 0$.

Suposem que $f(x)$ és una funció contínua i derivable al voltant del pnt $x = a$ complint $f\prime(a) < 0$, aleshores si apliquem la definició de derivada tindrem:

- $lim_{\text{h}\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{\text{h}} = f\prime(a) < 0$ i, per tant, com que h és positiva, $f(a+h) - f(a) < 0$ ja que en cas contrari $f\prime(a) > 0$. Per tant $f(a+h) - f(a) < 0 \to f(a+h) < f(a)$.

Per altra banda,

- $lim_{\text{h}\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = lim_{\text{h}\to 0^+} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = f\prime(a) < 0$ i per tant com que $-h$ és negativa, $f(a-h) - f(a) > 0$ ja que en cas contrari $f\prime(a) > 0$. Per tant $f(a-h) - f(a) > 0 \to f(a-h) > f(a)$.

Així, doncs, tindrem la cadena de desigualtats:

$$f(a+h) < f(a) < f(a-h)$$

D' aquesta manera f és decreixent.

Recíprocament, si f és una funció decreixent en el punt $x = a$ existeix un $h > 0$ tal que $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$, per tant $f\prime(a^-) = lim_{\text{h}\to 0^+} \frac{f(a-h)-f(a)}{-\text{h}} = lim_{\text{h}\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{\text{h}} \leq 0$ i f'(a$^+$) $= lim_{\text{h}\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{\text{h}} \leq 0$. Així doncs $f\prime(a) \leq 0$.

Exemple 1. Estudia el creixement i decreixement de de la funció $f(x) = x^2 + 4x - 2$.

- Observem que aquesta funció és un polinomi i per tant el seu domini seran tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = 2x + 4 = 0 \to 2x = -4$ la qual cosa dona $x = -2$. Per tant prenem un valor menor que -2 i un de major. Si la derivada en aquests punts es positiva la funció serà creixent mentre que si és negativa serà decreixent.

  $f\prime(-3) = 2{\cdot}(-3) + 4 = -2 < 0$.

$f\prime(0) = 2{\cdot}0 + 4 = 4 > 0$.

Així, doncs, tindrem que f és **decreixent** en (-$\infty, -2)$ mentre que és **creixent** en $(-2, +\infty)$. Observem, per tant, quetindrà un màxim en $x = 2$ que valdrà $f(2) = 2^2 + 4{\cdot}2 - 2 = 10$.

Exemple 2. Estudia el creixement i decreixement de la funció

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$$

- Observem que aquesta funció és un polinomi i per tant el seu domini seran tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{\text{-}1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \text{-}2 \end{cases}$, la qual cosa permet separar la recta real en tres intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

  $f\prime(-3) = 6(-3)^2 + 6{\cdot}(\text{-}3) - 12 = 24 > 0$.

  $f\prime(0) = 6{\cdot}(0)^2 + 6{\cdot}0 - 12 = -12 < 0$.

  $f\prime(2) = 6{\cdot}(2)^2 + 6{\cdot}2 - 12 = 24 > 0$.

  Així, doncs, tindrem que f és **creixent** en (-$\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ mentre que és **decreixent** en $(-2, 1)$. Per tant tindrem un màxim $x = 2$ que valdrà $2{\cdot}(-2)^3 + 3{\cdot}(-2)^2 - 12{\cdot}(-2) + 5 = -39$ i un mínim en $x = 1$ que valdrà $2{\cdot}1^3 + 3{\cdot}1^2 - 12{\cdot}1 + 5 = -2$.

Exemple 3. Estudia el creixement i decreixement de la funció

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

- Observem que aquesta funció té per domini$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$, la qual cosa permet separar la recta real en quatre intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

$f\prime(-3) = \frac{-2\cdot(-3)}{((-3)^2-1)^2} = \frac{+6}{64} = \frac{+3}{32} > 0.$

$f\prime(-0,5) = \frac{-2\cdot(-0,5)}{((-0,5)^2-1)^2} > 0.$

$f\prime(0,5) = \frac{-2\cdot(0,5)}{((0,5)^2-1)^2} < 0.$

$f\prime(2) = \frac{-2\cdot 3}{(3^2-1)^2} = \frac{-6}{64} = \frac{-3}{32} < 0.$

Així, doncs, tindrem

f és **creixent** $(-\infty, 0)$ mentre que és **decreixent** en $(0, +\infty)$. Per tant tindrem en $x = 0$ un màxim que valdrà $f(0) = \frac{1}{0^2-1} = -1$.

Exemple 4. Estudia el creixement i decreixement de la funció

$$f(x) = x\cdot e^x.$$

- Observem que aquesta funció té per domini tots els nombres reals, per veure el creixement i decreixement d'aquesta funció caldrà simplement igualar la primera derivada a 0:

  $f\prime(x) = e^x + x\cdot e^x = 0 \rightarrow e^x(x+1) = 0 \rightarrow x = -1$, la qual cosa permet separar la recta real en dos intervals $\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ i donem un valor per cada interval si la derivada en aquests punts és positiva la funció serà creixent mentre que si es negativa serà decreixent.

  $f\prime(-3) = e^{-3} - 3\cdot e^{-3} = -2e^{-3} < 0.$

  $f\prime(0) = e^0 - 0\cdot e^0 = 1 > 0.$

  Així, doncs, tindrem que f és **decreixent** en $(-\infty, -1)$ mentre que és **creixent** en $(-1, +\infty)$. Per tant tindrem en $x = -1$ un mínim que valdrà $f(-1) = -1\cdot e^{-1}$.

Exemple 5. Estudia el creixement i el decreixement de la funció

$$f(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

- El domini d'aquesta funció és $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculem la derivada d'aquesta funció:

$f\prime(x) = \frac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow -4 = 0$, la qual cosa ens permet estudiar la monotonia en els intervals $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$f\prime(0) = -4 < 0$.

$f\prime(2) = -4 < 0$.

D' aquesta manera f és decreixent en tot el seu domini.