Capítol 1

Continuïtat i derivabilitat

1.1 Funcions contínues

Definició 1.1. Una funció $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'anomena *contínua* en un punt $x = a$ si compleix,

(i) Existeix $f(a)$.

(ii) $lím_{x\to a^+} f(x) = lím_{x\to a-} f(x) = lím_{x\to a} f(x) = f(a)$.

En cas contrari, la funció s'anomena *discontínua* i trobem tres tipus de discontinuïtats:

(i) *Discontinuïtat evitable.* Es produeix quan existeix $\mathrm{lím}_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}}\mathrm{f(x)}$ i és finit però no coincideix amb la imatge o bé quan aquesta no existeix.

(ii) *Discontinuïtat inevitable de Salt.* Es produeix quan els límits laterals són finits però no coincideixen.

(iii) *Discontinuïtat inevitable essencial.* Es produiex quan algun dels límits és ∞.

Exemple 1.2. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.

El domini d'aquesta funció és $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$ i per tant aquesta funció serà contínua sempre, excepte, pot ser, en els punts, $x = 2$ i $x = -2$. Vegem que passa en $x = 2$,

- $f(2)$ no existeix ja que el 2 no és del domini.
- $lim_{x\to 2}\ \frac{x+2}{x^2\text{-}4} = \begin{cases} lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2\text{-}4} = +\infty \\ lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x^2\text{-}4} = -\infty \end{cases}$ i per tant $lim_{x\to 2}\ \frac{x+2}{x^2-4} = \infty$.

Així, doncs, tenim una discontinuïtat inevitable essencial en $x = 2$.

Vegem que passa en $x = -2$,

- $f(-2)$ no existeix ja que no és del domini.
- $lim_{x\to -2}\ \frac{x+2}{x^2\text{-}4} = \frac{0}{0} = lim_{x\to -2}\ \frac{x+2}{(x+2)\cdot(x-2)} = lim_{x\to\text{-}2}\ \frac{1}{(x-2)} = \frac{-1}{4}$.

Així, doncs, tenim una discontinuïtat evitable en $x = -2$ ja que podem fer contínua aquesta funció només canviant la imatge de $x = -2$, a través de la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2\text{-}4} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ \frac{-1}{4} & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$.

Exemple 1.3. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \frac{3x^2+2}{5} & \text{si} \quad 3 < x < 5 \\ \frac{77}{5} & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$

El domini d'aquesta funció són tots els nombres reals. Per tant, f serà contínua a tot arreu excepte, pot ser, en $x = 3$ i $x = 5$.

Vegem que passa en $x = 3$,

- $f(3) = 2{\cdot}3 + 4 = 10$.
- $lim_{x\to 3^+} \frac{3x^2+2}{5} = \frac{29}{5}$.
- $lim_{x\to 3^-} 2x + 4 = 10$.

Per tant f presenta una discontinuïtat inevitable de salt en $x = 3$.

Vegem que passa en $x = 5$,

- $f(5) = \frac{77}{5}$.
- $lim_{x\to 5^-} \frac{3x^2+2}{5} = \frac{77}{5}$.
- $lim_{x\to 5^+} \frac{77}{5} = \frac{77}{5}$.

Per tant f és contínua en $x = 5$.