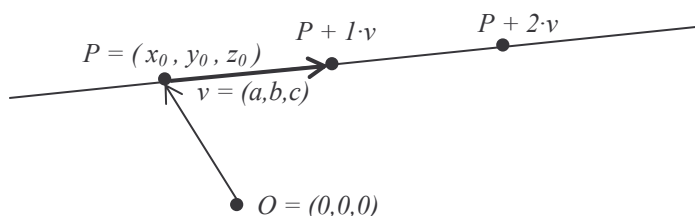


(2 btx)
RECTES I PLANS DE L'ESPAI

T.1. Rectes de l'espai.

- a) Determinació de rectes.
- (1) Dos punts.
 - (2) Punt i direcció (donada per un vector).
 - (3) Intersecció de plans.
- b) Vector director: Qualsevol vector determinat per dos punts de la recta.
- c) Equacions d'una recta de l'espai. Recta amb vector director $\vec{v} = (a, b, c)$ i que passa pel punt $P = (x_0, y_0, z_0)$.



- (1) Eq. vectorial.
- $(x, y, z) = \lambda \cdot (a, b, c) + (x_0, y_0, z_0)$
- (2) Eqs. paramètriques.
- $$\begin{cases} x = \lambda \cdot a + x_0 \\ y = \lambda \cdot b + y_0 \\ z = \lambda \cdot c + z_0 \end{cases}$$
- (3) Eq. contínua.
- $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
 - Consideracions en el cas que alguna component del vector director sigui nul·la.
- (4) Eq. cartesiana general.
- S'hi arriba multiplicant en creu dues de les tres igualtats de l'equació contínua.
 - $$\begin{cases} A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = D \\ A' \cdot x + B' \cdot y + C' \cdot z = D' \end{cases}$$
 - Observació: Es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat (*dimensió de la recta* = 1).
 - Càlcul del vector director d'una recta donada en equació cartesiana. $\vec{v} = (A, B, C) \wedge (A', B', C')$

d) Exemple. Recta que passa per $P = (-4, 3, 6)$ amb vector director $\vec{v} = (5, -2, 1)$

$$\rightarrow (x, y, z) = \lambda \cdot (5, -2, 1) + (-4, 3, 6) \quad (\text{eq. vectorial})$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 5 \cdot \lambda - 4 \\ y = -2 \cdot \lambda + 3 \\ z = \lambda + 6 \end{cases} \quad (\text{eqs. paramètriques})$$

$$\rightarrow \frac{x+4}{5} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-6}{1} \quad (\text{eq. contínua})$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x - 8 = 5y - 15 \\ y - 3 = -2z + 12 \end{cases} \quad (\text{pas intermedi, producte en creu})$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x - 5y = -7 \\ y + 2z = 15 \end{cases} \quad (\text{eq. cartesiana general})$$

e) Rectes paral·leles als eixos.

(1) Exemple. Recta per $P = (3, -1, 2)$ paral·lela a l'eix Y.

$$\bullet (x, y, z) = \lambda \cdot (0, 1, 0) + (3, -5, 2) \quad (\text{eq. vectorial})$$

$$\bullet \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda - 5 \\ z = 2 \end{cases} \quad (\text{eqs. paramètriques})$$

$$\bullet \text{ “ } \frac{x-3}{0} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-2}{0} \text{ ” } \quad (\text{eq. contínua})$$

$$\bullet \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 0 = z - 2 \end{cases} \quad (\text{pas intermedi, producte en creu})$$

$$\bullet \begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad (\text{eq. cartesiana general})$$

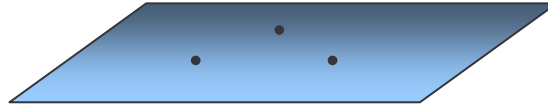
f) Condició d'alineació de tres punts. A, B, C estan alineats si els vectors AB i AC són linealment dependents. O bé, si C pertany a la recta AB.

g) Observació: Per saber si un punt pertany a una recta, només cal substituir les coordenades (x_0, y_0, z_0) del punt en l'equació de la recta i comprovar la validesa de la igualtat.

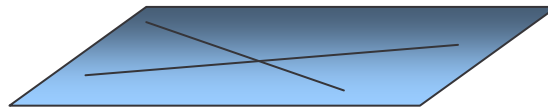
T.2. Plans de l'espai.

a) Determinació geomètrica de plans.

(1) Tres punts no alineats.



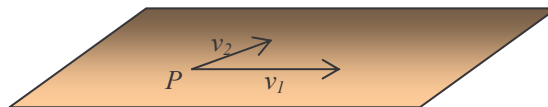
(2) Dues rectes que es tallen.



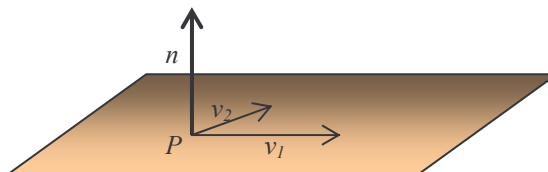
(3) Dues rectes paral·leles.



b) Vectors directores.



c) Vector normal o associat a un pla.



d) Determinació algebraica de plans.

(1) Un punt i dos vectors directores. $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v}_1 = (a, b, c)$,
 $\vec{v}_2 = (a', b', c')$

(2) Un punt i un vector normal. $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (A, B, C)$

e) Equacions d'un pla de l'espai.

(1) Eq. vectorial.

$$\bullet \quad (x, y, z) = \lambda \cdot (a, b, c) + \mu \cdot (a', b', c') + (x_0, y_0, z_0)$$

(2) Eqs. paramètriques.

$$\bullet \quad \begin{cases} x = \lambda \cdot a + \mu \cdot a' + x_0 \\ y = \lambda \cdot b + \mu \cdot b' + y_0 \\ z = \lambda \cdot c + \mu \cdot c' + z_0 \end{cases}$$

(3) Eq. cartesiana general.

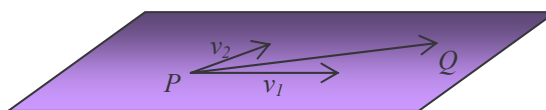
$$\bullet \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \Rightarrow \quad \dots \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = D$$

- Observació (important): Els valors A, B, C són les components del vector normal del pla.

- JUSTIFICACIÓ 1: El sistema anterior, de les equacions paramètriques (amb incògnites λ i μ), ha de ser compatible, per tal que el punt (x, y, z) sigui del pla). Rang $A = 2$ perquè els vectors v_1 i v_2 són lin. indep. Per tant, cal que rang $A^* = 2$. És a dir, que el determinant de la matriu ampliada s'anul·li.

$$\begin{cases} \lambda \cdot a + \mu \cdot a' = x - x_0 \\ \lambda \cdot b + \mu \cdot b' = y - y_0 \\ \lambda \cdot c + \mu \cdot c' = z - z_0 \end{cases}$$

- JUSTIFICACIÓ 2: Els vectors v_1, v_2 i PQ , (amb $Q=(x, y, z)$ un punt qualsevol del pla) han de ser linealment dependents.



- Observació: Es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat (*dimensió del pla = 2*).

- f) Exemple: Pla que passa per $(1,-2,4)$ i té vectors directors $\vec{v}_1 = (3,-1,2)$ i $\vec{v}_2 = (0,5,-3)$

(1) Eq. vectorial.

$$\bullet \quad (x,y,z) = \lambda \cdot (3,-1,2) + \mu \cdot (0,5,-3) + (1,-2,4)$$

(2) Eqs. paramètriques.

$$\bullet \quad \begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 5\mu - 2 \\ z = 2\lambda - 3\mu + 4 \end{cases}$$

(3) Eq. cartesiana general.

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+2 & -1 & 5 \\ z-4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \Rightarrow \dots \quad -7x + 9y + 15z - 35 = 0$$

$$\Rightarrow -7x + 9y + 15z = 35$$

- g) Exemple: Pla que passa per $(-3,1,0)$ i té vector normal $\vec{n} = (-2,1,-3)$.

(1) Eq. cartesiana general.

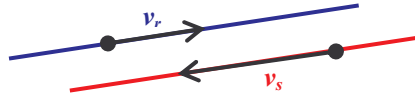
$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ -2 \cdot x + y - 3 \cdot z = D \\ -2 \cdot (-3) + 1 - 3 \cdot 0 = D \\ 6 + 1 - 0 = D \\ 7 = D \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : -2x + y - 3z = 7 \quad (\text{equació del pla})$$

- h) Observació: Per saber si un punt pertany a un pla, només cal substituir les coordenades (x_0, y_0, z_0) del punt en l'equació del pla i comprovar la validesa de la igualtat.
- i) Condició de coplanarietat de quatre punts. A , B , C , D són coplanaris si els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ són linealment dependents.

T.3. Posicions relatives a partir de l'anàlisi geomètrica dels elements.

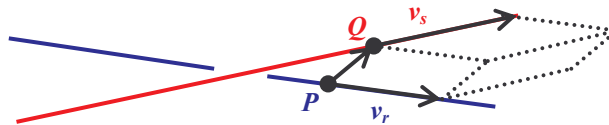
a) Dues rectes.

(1) $\vec{v}_r = \lambda \cdot \vec{v}_s \rightarrow r = s$ o bé $r \parallel s$.



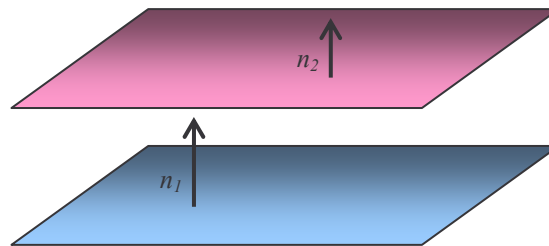
(2) $\vec{v}_r \neq \lambda \cdot \vec{v}_s \rightarrow r$ i s es tallen (en un punt) o bé r i s s'encreuen.

- Si determinant $(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}) = 0 \Rightarrow$ "volum" = 0 $\Rightarrow$ es tallen.
- Si determinant $(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}) \neq 0 \Rightarrow$ "volum" $\neq 0 \Rightarrow$ s'encreuen

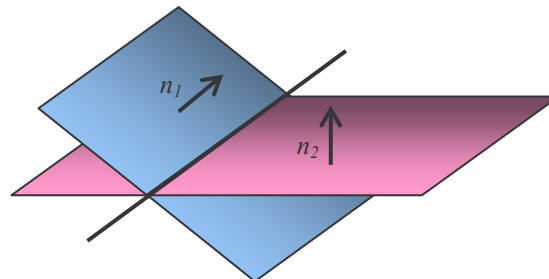


b) Dos plans.

(1) $\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2 \rightarrow \pi_1 = \pi_2$ o bé $\pi_1 \parallel \pi_2$

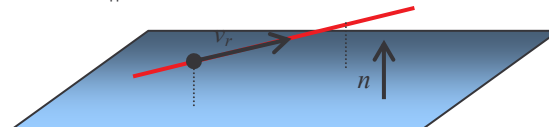


(2) $\vec{n}_1 \neq \lambda \cdot \vec{n}_2 \rightarrow \pi_1$ i π_2 es tallen (en una recta)

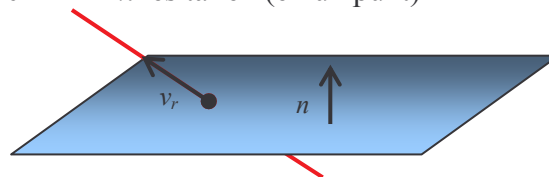


c) Recta i pla.

(1) $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow r \parallel \pi$ o bé $r \subseteq \pi$



(2) $\vec{v}_r \cdot \vec{n} \neq 0 \rightarrow r$ i π es tallen (en un punt)



T.4. Posicions relatives a partir de l'anàlisi algebraica del sistema d'equacions de les respectives equacions cartesianes.

a) Dues rectes (4 equacions amb 3 incògnites).

- (1) S.C.D. (rangs (3,3)) $\rightarrow$ r i s es tallen (en un punt, que és la solució del sistema).
- (2) S.C.I. amb 1 grau de llibertat (rangs (2,2)) $\rightarrow$ r = s
- (3) S.I. amb rangs (2,3) $\rightarrow$ r $\parallel$ s
- (4) S.I. amb rangs (3,4) $\rightarrow$ r i s s'encreuen.

b) Dos plans (2 equacions amb 3 incògnites).

- (1) S.C.I. amb 1 grau de llibertat (rangs (2,2)) $\rightarrow$ π_1 i π_2 es tallen (en una recta, les equacions paramètriques de la qual són la solució del sistema).
- (2) S.C.I. amb 2 graus de llibertat (rangs (1,1)) $\rightarrow$ $\pi_1 = \pi_2$.
- (3) S.I. amb rangs (1,2) $\rightarrow$ $\pi_1 \parallel \pi_2$.

c) Recta i pla (3 equacions amb 3 incògnites).

- (1) S.C.D. (rangs (3,3)) $\rightarrow$ r i π es tallen (en un punt, que és la solució del sistema).
- (2) S.C.I. amb 1 grau de llibertat (rangs (2,2)) $\rightarrow$ r $\subseteq$ π .
- (3) S.I. amb rangs (2,3) $\rightarrow$ r $\parallel$ π .