(2 btx)
RECTES I PLANS DE L'ESPAI

Rectes de l'espai.

1. Determina les equacions de la recta que passa pels punts $A = (3, -1, 0)$ i $B = (5, 3, 1)$.

Solució: ${}^{x-3}/_{2} = {}^{y+1}/_{4} = z$

2. Determina l'equació cartesiana de la recta que passa pel punt $A = (2, 3, -1)$ i és paral·lela a la recta $r: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$

Solució: $\{ 2x - 3y = -5 , y + 2z = 1 \}$

3. Donats els punts $A = (1, 2, -1)$, $B = (-5, 3, 0)$, $C = (-2, 0, 1)$ i $D = (10, -2, -1)$.

a) Determina si les rectes AB i CD tenen la mateixa direcció, o no.

Solució: Sí, tenen la mateixa direcció

b) Són la mateixa recta ?

Solució: No

Plans de l'espai.

4. *(PAU 1999)* Considera la recta r de l'espai d'equacions $\dfrac{x-3}{2} = y = \dfrac{z+1}{2}$. Troba l'equació cartesiana del pla que conté r i que passa pel punt $P=(1,1,1)$.

Solució: $2y - z = 1$

5. *(PAU 1999)* Donades les rectes $r_1 : \begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ i $r_2 : x = \dfrac{y}{3} = z$, calcula l'equació del pla paral·lel a les dues rectes que passa per l'origen.

Solució: $-4x + y + z = 0$

Posicions relatives.

6. *(PAU 2001)* Determina per a quins valors del paràmetre a el pla $\pi: a \cdot x + 2y + z = a$ és paral·lel a la recta $r: \begin{cases} x - a \cdot y + z = 1 \\ a \cdot x + z = a + 1 \end{cases}$

Solució: a = 1

7. Considera la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ de l'espai.

a) Determina el valor de a per tal que el pla d'equació $2x + y + az = b$ sigui paral·lel a r.

Solució: a = 4

b) Raona per a quin valor de b la recta està continguda en el pla.

Solució: b = 3

8. Estudia la posició relativa de la recta $r: \begin{cases} 4x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ respecte al pla

$$\pi: \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - 5\lambda - 3\mu \end{cases}$$

Solució: Es tallen en el punt (–9 , –9 , 27)

9. Raona quina és la posició relativa dels plans $\pi_1: \lambda x + y + z = 2$ i $\pi_2: x + y + z = \mu + 3$ segons els valors dels paràmetres λ i μ. Raona tots els passos.

Solució: $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ *es tallen*

$\lambda = 1$ *i* $\mu = -1 \Rightarrow$ *plans iguals*

$\lambda = 1$ *i* $\mu \neq -1 \Rightarrow$ *plans paral·lels*

10. *(PAU 2002)* Considera els plans d'equacions $\pi_1: x + 2y - z = 3$ i $\pi_2: ax + (a-2)y + 2z = 4$.

a) Hi ha algun valor del paràmetre a per al qual la intersecció dels plans π_1 i π_2 no és una recta ?

Solució: $a = -2 \Rightarrow$ *els plans són paral·lels*

b) Calcula un vector director de la recta que s'obté quan es fa la intersecció de π_1 i π_2 per al valor del paràmetre $a = 0$.

Solució: (2 , –2 , –2) o bé (1 , –1 , –1)

<u>Interpretació geomètrica de sistemes d'equacions lineals.</u>

11. *(PAU 2000)* Se sap que el sistema d'equacions següent té més d'una solució. Calcula a i digues quina és la interpretació geomètrica que té el conjunt de solucions d'aquest sistema.

$$\begin{cases} x + y - a \cdot z = -2 \\ 2x + y - 8z = -1 \\ -x - 2y + 10z = 5 \end{cases}$$

Solució: a = 6

12. *(PAU 1999)* Si el rang de la matriu d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és 2 i el de la matriu ampliada és 3, quines interpretacions geomètriques pots donar a aquest sistema ? Dóna un exemple de sistema amb aquestes característiques i la seva interpretació geomètrica.

13. *(PAU 2004)* Considerem els punts de l'espai $A(1,1,0)$, $B(0,1,2)$ i $C(-1,2,1)$. Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana *(raona adequadament les respostes)*:

a) aquests punts, estan alineats ?

Solució: no estan alineats

b) podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions ?

Solució: rang A = rang A = 2*

14. *(PAU 2004)* Donat el sistema

$$\begin{cases} & & y & + & z & = & 2 \\ -2x & + & y & + & z & = & -1 \\ (2-2m)x & & & + & (2m-2)z & = & m-1 \end{cases}$$

on m és un paràmetre:

a) discuteix el sistema segons els valors de m.

Solució: $m \neq 1 \Rightarrow$ SCD

$m = 1 \Rightarrow$ SCI amb 1 grau de llibertat

b) resol els casos compatibles.

Solució: $m \neq 1 \Rightarrow x = {}^3/_2 \,,\, y = 0 \,,\, z = 2$

$m = 1 \Rightarrow x = {}^3/_2 \,,\, y = 2 - \lambda \,,\, z = \lambda$

c) en cada un dels casos de la discussió de l'apartat **(a)**, fes una interpretació geomètrica del sistema.

Una mica de tot.

15. Calcula l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades i és paral·lela als plans $\pi_1 : x - 2y + z = 2$, $\pi_2 : 2y - z = 1$.

Solució: $\{ x - 2y + z = 0 , 2y - z = 0 \}$
o bé $\{ x = 0 , 2y = z \}$

16. Donats els plans $\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0$, $\pi_2 : 7x - y - 1 = 0$ i el punt $A (0 , 3 , -2)$, troba l'equació de la recta que passa per A i és paral·lela als plans π_1 i π_2.

Solució: $\{ x - 2y + 3z = -12 , 7x - y = -3 \}$
o bé $\{ 21x - 3y = -9 , 13x - 3z = 6 \}$

17. *(PAU 2000)* Calcula el peu de la recta perpendicular a la recta $r: (x , y , z) = (1 , -1 , 1) + \lambda (0 , 1 , 1)$ traçada des del punt $P = (1 , 0 , -1)$.

Solució: $(1 , {}^{-3}/_{2} , {}^{1}/_{2})$

18. Calcula el punt simètric del punt A de coordenades $(1 , 2 , 3)$ respecte de la recta r d'equació $(x , y , z) = (0 , 0 , 2) + \lambda (3 , 1 , 0)$.

Solució: $(2 , -1 , 1)$

19. Sigui P el punt $(1 , 0 , -1)$. Sigui Q el punt simètric de P respecte al pla $x - 2y = 0$. Sigui R el punt simètric de Q respecte al pla $x + 2y + z = 1$. Calcula l'equació del pla que passa pels punts P, Q i R.

Solució: $2x + y - 4z = 6$

20. *(PAU 1999)* Donat el tetràedre de vèrtexs $A = (0 , 0 , 0)$, $B = (1 , 1 , 1)$, $C = (3 , 0 , 0)$ i $D = (0 , 3 , 0)$,

a) Calcula l'equació del pla que conté la cara BCD i la del pla que conté la cara ACD.

Solució: BCD: $x + y + z = 3$; ACD: $z = 0$

b) Calcula les equacions de dues de les altures del tetràedre, la que passa pel vèrtex A i la que passa pel vèrtex B, respectivament.

Solució: h_A: $(x,y,z)=\lambda(1,1,1)$; h_B: $(x,y,z)=(1,1,1)+\mu(0,0,1)$

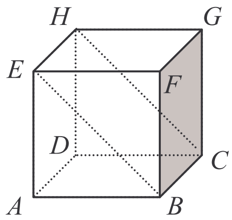
c) Comprova que les dues altures anteriors es tallen en un punt P.

Solució: $P = (1,1,1)$

d) Comprova si la recta que uneix qualsevol vèrtex del tetràedre amb P és perpendicular a la cara oposada (i és, per tant, una altura del tetràedre).

Solució: en general, no

21. *(PAU 2002)* Considerem el cub de vèrtexs A, B, C, D, E, F, G, H que té l'aresta de longitud 4 dm.



a) Determina l'equació del pla inclinat $EHBC$ si prenem com a origen de coordenades el vèrtex D i com a eixos de coordenades DA, DC i DH en aquest ordre, tenint en compte que el sentit positiu de cada un d'ells és el que sortint de l'origen D va cap a A, C i H, respectivament.

Solució: $y + z = 4$

b) Calcula les equacions de les diagonals CE i AG i utilitza-les per calcular les coordenades del punt d'intersecció.

Solució: $CE: \frac{x}{4} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{4}$, $AG: \frac{x-4}{-4} = \frac{y}{4} = \frac{z}{4}$, punt=(2,2,2)