



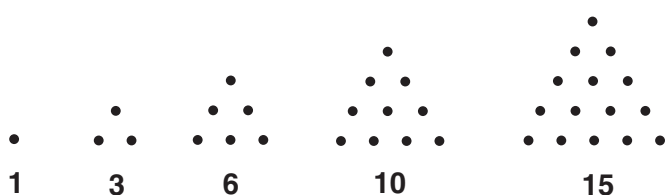
- Quantes xifres té un nombre natural que en notació científica s'expressa per $1,24 \cdot 10^{18}$?
- Escriu el nombre següent de 2^{10} .
- Esbrina quina és la llei de formació dels nombres següents: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... Escriu-ne tres més que verifiquin la mateixa llei de formació.
- Si n representa un nombre natural, expressa:
 - a) El doble de n .
 - b) L'anterior de n .
 - c) El posterior de n .
 - d) L'anterior de l'anterior de n .



A punt!

A les comarques del Penedès i el Garraf hi ha agrupacions de *falcons*. Es tracta de grups de joves que fan construccions humanes semblants als castells populars arreu de Catalunya. Un d'aquests falcons és el de la fotografia. A cada filera hi ha un falconer o falconera menys que en l'anterior i rematen la construcció amb un falconer fent l'àngel.

El nombre total de falconers que hi ha dona, en cada cas, un conjunt de nombres que s'anomenen **triangulars**, ja que de manera esquemàtica es poden considerar formant un triangle equilàter.



Com s'obtenen aquests nombres? Observa:

1r nombre: 1; 2n nombre: $1 + 2 = 3$; 3r nombre: $3 + 3 = 6$; 4t nombre: $6 + 4 = 10$; 5è nombre: $10 + 5 = 15$; 6è nombre: $15 + 6 = 21$. I així successivament.

1r, 2n, 3r, 4t, etc., són **nombres ordinals**. Un nombre ordinal és el que expressa el lloc que ocupa en una col·lecció de nombres.

Com es pot observar, per obtenir un nombre triangular determinat cal sumar a l'anterior el nombre ordinal corresponent i, d'aquesta manera, obtenim la sèrie dels nombres triangulars:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78...

Ens podem plantejar una nova situació.

Si es volen posar 10 falconers a la base, quants falconers es podran col·locar en total? Si tenim la llista dels nombres triangulars n'hi ha prou de mirar el desè terme. 55 és el nombre de falconers que es poden col·locar.

La formació dels nombres triangulars successius ens permet observar que cada un d'aquests nombres és la suma dels nombres naturals consecutius des de l'1 fins al del nombre ordinal corresponent. Per exemple:

La suma dels 3 primers, $1 + 2 + 3 = 6$ és el 3r nombre triangular.

La suma dels 6 primers, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, és el 6è nombre triangular.

La suma dels 10 primers, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$, és el 10è nombre triangular.

Encara podem observar més curiositats en els nombres triangulars.

La suma del primer i el segon nombre triangular, $1 + 3 = 4 = 2^2$, és el quadrat de 2.

La suma del tercer i el quart, $6 + 10 = 16 = 4^2$, és el quadrat de 4.

La suma de dos nombres triangulars consecutius és el quadrat del lloc que ocupa el segon nombre.

Moltes sèries o col·leccions de nombres ordenats presenten força propietats i característiques d'aplicacions diverses. En aquesta unitat es pretén estudiar-ne unes quantes i ampliar el coneixement i el comportament dels **nombres en sèries ordenades**.



Els nombres naturals

Els primers nombres que tots hem conegut són els nombres que serveixen per comptar: 1, 2, 3, 4, 5, ... 21, 22, 23, ... 430, 431, ... Són els nombres naturals dels quals sabem que el primer és l'1 i que no s'acaben mai.

El matemàtic italià **Giuseppe Peano** (1858-1932) va enunciar les característiques del conjunt dels nombres naturals:

- 1 és el primer nombre natural.
- Cada nombre es forma a partir de l'anterior sumant-li 1.



Un **axioma** és una proposició que s'admet sense demostració i que es considera un principi veritable.



El resultat d'algunes operacions entre nombres naturals no és un nombre natural. Per exemple: $6 - 8$ o $12 : 5$.

Aquests **axiomes** es coneixen amb el nom del seu formulador.

El conjunt dels nombres naturals es representa per $\mathbb{N}$. Per representar qualsevol nombre natural se sol utilitzar la lletra **n**.

El primer que cal remarcar del conjunt dels nombres naturals és que està perfectament ordenat, ja que hi ha un primer element i tenim un criteri per construir tots els que segueixen. Donat un nombre natural qualsevol sempre existeix el seu següent que es forma sumant-li 1. Això ens indica que la sèrie dels nombres naturals no té últim element. Per més gran que sigui el nombre que es consideri sempre podem escriure'n el següent. En aquest sentit podem dir que el conjunt dels nombres naturals és infinit.

Com bé sabeu, la suma i la multiplicació de dos nombres naturals sempre té per resultat un altre nombre natural. No passa el mateix amb les operacions inverses corresponents. La resta i la divisió de dos nombres naturals no sempre té com a resultat un nombre natural.

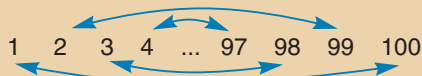
exemple 1

Calcula la suma dels 100 primers nombres naturals.

Resolució

Trobar la suma de cent sumands és força pesat. Cal trobar un procediment per sumar-los tots sense necessitat d'efectuar la suma de tots.

Observem els nombres que cal sumar.



Comprovem que: $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 101$. En la suma dels 100 nombres hi ha 50 sumes com aquestes. La suma dels 100 nombres és: $50 \cdot 101 = 5050$.

La suma dels 100 primers nombres naturals és 5050.



1. Escribe los números anterior i següent de dos milions i mig amb totes les seves xifres.
2. Sense efectuar-les, indica quines de les operacions següents tenen com a resultat un nombre natural:
a) $234 - 432$ b) $975 : 15$ c) $300 : 25$ d) $10^2 \cdot 5^5$
3. Si n representa un nombre natural qualsevol, $2n$ representa un nombre parell. Com representaries un nombre imparell?
4. Calcula la suma dels 200 primers nombres naturals.

Considerem les col·leccions de nombres següents:

a) 2, 4, 6, 8...

b) 3, 6, 9, 12...

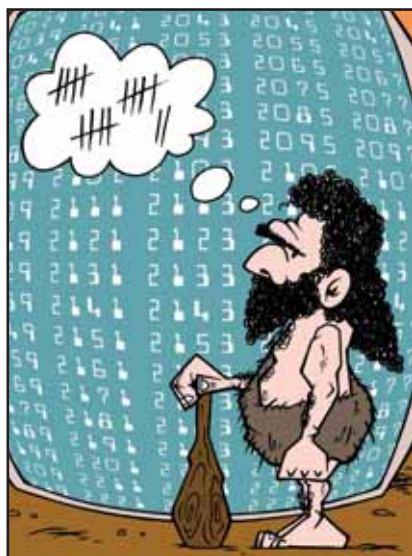
c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

En cadascuna d'aquestes col·leccions apareix un ordre d'escriptura dels diferents nombres. Hi ha un primer element i a aquest el segueix un altre, però no es tracta de la sèrie dels nombres naturals.

En la sèrie de l'exemple, b): 3, 6, 9, 12..., tenim: $1r \rightarrow 3$, $2n \rightarrow 6$, $3r \rightarrow 9 \dots$

Fixeu-vos que a cada nombre natural li correspon un nombre segons el lloc que ocupa. Aquest tipus de col·leccions numèriques s'anomenen **successions**.

Una **successió** és una col·lecció de nombres reals en correspondència amb els nombres naturals i que presenten un criteri que permet escriure'n els nombres que segueixen si se'n coneixen uns quants. Cadascun dels nombres que la formen s'anomena **terme** de la successió.



La relació entre els nombres naturals i els termes d'una successió es posa de manifest utilitzant una lletra amb subíndex que indica el lloc que ocupa el nombre en la successió.

Per tant, una successió es pot representar per:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$$

On a_1 és el primer element, a_2 és el segon, etc., i a_n és el que ocupa el lloc n .

De la mateixa manera, a_{n-1} indica el terme anterior a a_n i a_{n+1} indica el terme següent a a_n .

En la successió de l'exemple a) tenim: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6 \dots$

La successió de l'exemple b) la podem descriure com la formada pels múltiples de 3. El terme que ocupa el lloc n s'expressa per $a_n = 3n$.

Terme general

El valor de cadascun dels termes d'una successió depèn del lloc que ocupa. Aquesta dependència no és més que una funció en la qual per a cada nombre natural li correspon un terme de la successió i que es pot simbolitzar per $n \rightarrow a_n$. En el llenguatge de les funcions: $f(n) = a_n$.

En la successió de l'exemple c) tenim: $n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$, $n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{3} \dots$

Quina expressió correspon al terme que ocupa el lloc n ?

Observem la successió. Tots els termes són fraccions que tenen de numerador 1, i de denominador, el nombre natural següent al lloc que ocupen. Per tant, podem escriure:

$$1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad 2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \quad n \rightarrow a_n = \frac{1}{n+1}$$

Observa que per a cada valor de n tenim un terme de la successió. Per exemple, el terme dotzè: $n = 12 \rightarrow a_{12} = \frac{1}{12+1} = \frac{1}{13}$

Així doncs, la igualtat $a_n = \frac{1}{n+1}$ és l'expressió del **terme general** de la successió considerada.

*L'expressió d'un terme qualsevol d'una successió segons el lloc que ocupa, n , és l'expressió del **terme general** a_n de la successió. Si coneixem a_n podem determinar tots i cadascun dels termes que formen la successió.*

Hi ha successions que no tenen una expressió algebraica del terme general a_n . Per exemple, el llistat dels rècords de les curses de 100 m al llarg de totes les olimpíades.

En la successió 5, 7, 10, 14, 19... en la qual $a_1 = 5$ i els termes següents es formen sumant a l'anterior 2, 3, 4, 5... successivament, no hi ha una expressió de a_n només depenent de n , però sí que existeix una llei de formació dels termes, que es pot expressar:

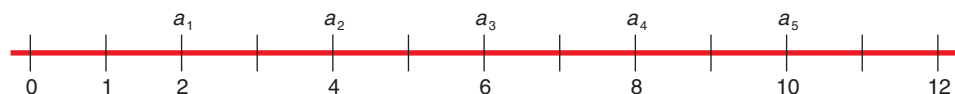
$$a_n = a_{n-1} + n \text{ per a tot } n > 1$$

L'expressió de a_n depèn de n i no es pot escriure qualsevol terme si no es coneix l'anterior.

Representació gràfica

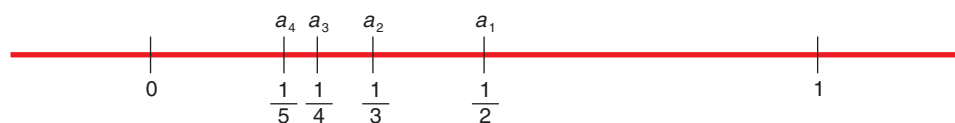
Els termes d'una successió són nombres reals i es poden representar en la recta numèrica.

Considerem la successió dels nombres parells: 2, 4, 6, 8...



A cadascun dels termes de la successió li correspon un punt de la recta.

De manera semblant, si es considera la successió $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$ també podem representar cada un dels termes en la recta numèrica.



5. Considera les successions següents. En cada cas, escriu tres termes més i intenta trobar l'expressió del terme general per a cadascuna d'elles:

a) 1, 4, 9, 16, 25... b) 5, 10, 15, 20, 25...

c) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25} \dots$ d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \dots$

6. Considera la successió el terme general de la qual s'expressa per: $a_n = \frac{3n}{n^2 + 1}$. Escriu els cinc primers termes de la successió i els que ocupen els llocs 50 i 120.

7. La successió 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... és la successió de Fibonacci. Escriu tres termes més i troba quina és la forma que et permet escriure'ls.



Progressions aritmètiques

Considerem la successió tal que els primers termes són: 2, 5, 8, 11, 14, 17...

– El primer terme és: $a_1 = 2$

– El segon terme és: $a_2 = 5 = 2 + 3$

– El tercer terme és: $a_3 = 8 = 5 + 3$

Successivament cada terme es forma sumant 3 a l'anterior. I, en conseqüència, també es verifica que $a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$ i $a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$.

Aquesta successió és una **progressió aritmètica**.

Una **progressió aritmètica** és una successió en la qual cada terme, excepte el primer, es forma sumant a l'anterior un mateix nombre real.

També podem dir que una successió és una progressió aritmètica si la diferència entre un terme i l'anterior és sempre el mateix nombre. Aquest nombre s'anomena **diferència** de la progressió i es representa per d .

La successió dels nombres parells és una progressió aritmètica en la qual $a_1 = 2$ i $d = 2$.

La progressió aritmètica 2, 4, 6, 8... és creixent, cada terme és més gran que l'anterior, ja que la diferència $d = 2 > 0$.

La progressió aritmètica 7, 4, 1, -2... és decreixent, cada terme és més petit que l'anterior, ja que $d = -3 < 0$.

Terme general

Utilitzant la llei de formació dels termes d'una progressió aritmètica en podem deduir l'expressió del terme general.

Considerem els termes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ d'una progressió aritmètica de diferència d . Aplicant la definició tenim:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$

(...)



Es pot observar que el coeficient de la diferència d és una unitat inferior al subíndex del terme que es considera en cada cas.

En general, per a un terme a_n qualsevol, tenim:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

En l'exemple amb el qual hem començat aquest apartat, tenim $a_1 = 2$ i la diferència $d = 3$. L'expressió del terme general és:

$$a_n = 2 + (n - 1)3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1 \rightarrow a_n = 3n - 1$$

Observeu que el coeficient de n és la diferència de la progressió. Aquesta expressió permet calcular qualsevol terme. Per exemple, el dotzè terme és:

$$a_{12} = 2 + 11 \cdot 3 = 2 + 33 = 35 \text{ o també } a_{12} = 3 \cdot 12 - 1 = 36 - 1 = 35$$

Interpolació aritmètica

Es coneix per **interpolació aritmètica** el procediment d'intercalar alguns termes entre dos de donats de manera que tots siguin termes consecutius d'una progressió aritmètica.

Considerem els nombres 6 i 30 i, entre aquests nombres, en volem intercalar cinc de manera que formin una progressió aritmètica de set termes.

Les dades són: $a_1 = 6$ i $a_7 = 30$. La incògnita és la diferència d , ja que si es coneix aquesta diferència es poden escriure tots els termes que falten a partir del primer.

Escrivim l'expressió de a_7 :

$$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow 30 = 6 + 6d \rightarrow 6d = 24 \rightarrow d = 4$$

Els cinc termes buscats s'obtenen sumant 4 a $a_1 = 6$ successivament. Són: 10, 14, 18, 22, 26.

Els set termes de la progressió són: 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30.

exemple 2

Escriu el desè terme d'una progressió aritmètica de primer terme -4 i de diferència 5. És 120 un terme d'aquesta progressió?

Resolució

Escrivim l'expressió del terme general per a $n = 10$:

$$a_{10} = a_1 + 9d \rightarrow a_{10} = -4 + 9 \cdot 5 = 41 \rightarrow a_{10} = 41$$

Esbrinar si 120 és un terme de la progressió equival a trobar un $a_n = 120$. Per tant:

$$120 = -4 + (n - 1)5 \rightarrow 120 = -4 + 5n - 5 \rightarrow 5n = 129 \rightarrow n = \frac{129}{5}$$

La solució de l'equació dona per a n un valor que no és un nombre natural. Això indica que no hi ha cap terme de la progressió que sigui 120.

exemple 3

El sisè terme d'una progressió aritmètica és 15 i la seva diferència és 4. Calcula a_{14} .

Resolució

Amb les dades que tenim, $a_6 = 15$ i $d = 4$, es pot calcular primer a_1 :

$$a_6 = a_1 + 5d \rightarrow 15 = a_1 + 5 \cdot 4$$

$$15 = a_1 + 20 \rightarrow a_1 = -5$$

Calculem a_{14} :

$$a_{14} = a_1 + 13d \rightarrow a_{14} = -5 + 13 \cdot 4 \rightarrow a_{14} = 47$$

També es pot calcular directament a_{14} sense calcular a_1 si es consideren alhora les igualtats:

$$a_{14} = a_1 + 13d$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

I es resten terme a terme:

$$a_{14} - a_6 = 13d - 5d \rightarrow a_{14} - a_6 = 8d$$

$$a_{14} = 8d + a_6$$

$$a_{14} = 8 \cdot 4 + 15 = 47$$

activitats

8. El primer terme d'una progressió aritmètica és 9 i la diferència és 2. Calcula a_{20} .

9. Els primers termes d'una successió són:

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \dots$$

Es tracta d'una progressió aritmètica? Si és així, calcula la diferència i el terme desè.

10. En una progressió aritmètica $a_{11} = 35$ i la diferència és 4. Calcula a_1 i a_{30} .

11. Considera la successió dels múltiples de 3. Formen una progressió aritmètica? Quina és la diferència? Pertany 171 a aquesta successió? Quin lloc ocupa?

12. Interpola tres nombres entre 2 i 10 de manera que els cinc formin una progressió aritmètica.



Suma de termes d'una progressió aritmètica

Considerem els vuit primers termes de la progressió: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23.

Pots comprovar que $a_1 + a_8 = 25$ i que aquesta també és la suma de $a_2 + a_7 = 25$; $a_3 + a_6 = 25$, $a_4 + a_5 = 25$.

Si considerem els nou primers termes de la progressió: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, es verifica que:

$$a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = 2a_5 = 28$$

Aquesta comprovació ens posa de manifest que:

- a) La suma de dos termes equidistants d'altres dos és igual a la suma d'aquests dos.
- b) La suma de termes equidistants dels extrems és igual a la suma dels extrems.
- c) Si la progressió té un nombre imparell de termes, aleshores la suma dels termes extrems és igual al doble del terme central.

Considerem una progressió aritmètica de n termes i demostrem que, en general, es verifica la propietat anterior:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{n-2} \quad a_{n-1} \quad a_n$$

(Diagrama amb fletxes blaves que connecta a_1 amb a_n , a_2 amb a_{n-1} , i a_3 amb a_{n-2})

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = 2a_1 + (n-1)d$$

Podríem continuar fent més sumes i obtindríem sempre el mateix resultat.

Utilitzarem la propietat anterior per obtenir una expressió que ens permeti calcular la suma d'un nombre finit de termes d'una progressió aritmètica.

Expressem la suma de n termes que cal calcular:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Per la propietat commutativa de la suma, aquesta expressió també es pot escriure de la manera següent:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$$

Sumant terme a terme les dues igualtats s'obté:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$$

$$2 S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Aplicant la propietat associativa de la suma es poden agrupar els termes en columna i observem que es verifica que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$$

Tenim n sumes parcials iguals i podem expressar:

$$2 S_n = (a_1 + a_n) n \rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

La suma $a_1 + a_n$ es pot substituir per la suma d'altres dos termes equidistants d'ells.

- Utilitzem l'expressió obtinguda per calcular la suma dels 20 primers termes d'una progressió aritmètica de diferència 3 i primer terme -6 .

$$\text{Dades: } n = 20, a_1 = -6 \text{ i } d = 3$$

$$\text{Calculem } a_{20} = a_1 + 19d = -6 + 19 \cdot 3 = 51$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})20}{2} \rightarrow S_{20} = \frac{(-6 + 51)20}{2} = 450$$



exemple 4

Calcula la suma dels 100 primers múltiples de 5.

Resolució

Els 100 primers múltiples de 5 formen una progressió aritmètica de diferència 5 en la qual $a_1 = 5$, $a_n = 5n$ i $a_{100} = 500$. Només cal aplicar la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow S_{100} = \frac{(5 + 500)100}{2} = 25\,250$$

exemple 5

Les mesures dels angles d'un quadrilàter estan en progressió aritmètica de diferència 20° . Quina és la mesura de cadascun dels quatre angles?

Resolució

En una primera lectura de l'enunciat sembla que només tinguem una dada, $d = 20^\circ$, però sabem que la progressió té quatre termes i que la suma dels angles d'un quadrilàter és 360° .

En l'expressió de la suma podem substituir les dades conegudes tenint en compte que:

$$a_4 = a_1 + 3d = a_1 + 3 \cdot 20 = a_1 + 60 \rightarrow 360 = \frac{(a_1 + a_1 + 60) 4}{2} = (2a_1 + 60)2$$
$$180 = 2a_1 + 60 \rightarrow a_1 = 60$$

Per obtenir els altres angles n'hi ha prou amb sumar la diferència de manera consecutiva.

Els quatre angles del quadrilàter són: 60° , 80° , 100° i 120° . Comprova que sumen 360° .

exemple 6

Sabem que la suma del segon i l'onzè terme d'una progressió aritmètica és 36. El quart terme és 13. Escriu els onze termes de la progressió.

Resolució

Expressem cadascun dels termes que intervenen en l'enunciat en funció del primer terme i la diferència. Representem a_1 per x :

$$a_2 = x + d \quad a_{11} = x + 10d \quad a_4 = x + 3d = 13$$

Per l'enunciat sabem que:

$$a_2 + a_{11} = 36 \rightarrow x + d + x + 10d = 36 \rightarrow 2x + 11d = 36$$

Tenim el sistema:
$$\begin{cases} x + 3d = 13 \\ 2x + 11d = 36 \end{cases}$$

On x és el primer terme i d , la diferència. Resolem el sistema:

$$x = 13 - 3d \rightarrow 2(13 - d) + 11d = 36 \rightarrow d = 2 \text{ i } x = 13 - 3d = 7$$

Els onze termes de la progressió són: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 i 27.

13. D'una progressió aritmètica es coneixen $a_1 = 2$ i $a_{15} = 50$. Troba la suma dels 15 termes, la diferència de la progressió i el terme central.

14. Calcula la suma de tots els nombres parells de dues xifres.

15. Calcula les longituds dels costats d'un triangle rectangle sabent que estan en progressió aritmètica de diferència 2.

16. Considera la successió $2, \frac{3}{2}, 1, \dots$. És una progressió aritmètica?

En cas afirmatiu, troba la diferència, l'expressió del terme general, a_{10} i la suma dels deu primers termes.

17. Les longituds dels costats d'un triangle estan en progressió aritmètica. El més gran fa 15 cm i el perímetre del triangle és 39 cm. Troba la longitud dels altres dos costats.



Progressions geomètriques

Observem la successió: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$a_1 = 2$ $a_2 = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$ $a_3 = \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2}$ $a_4 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $a_5 = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$,
i així successivament.

Com es pot veure, cada terme es forma multiplicant l'anterior per $\frac{1}{2}$. I, per tant, també es verifica que: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{2}$.

Aquesta successió és una **progressió geomètrica**.

Una **progressió geomètrica** és una successió en la qual cada terme, excepte el primer, s'obté multiplicant l'anterior per un mateix nombre.



Una progressió geomètrica està determinada si es coneix a_1 i r .

De manera equivalent es pot definir una progressió geomètrica com la successió en la qual el quocient entre un terme i l'anterior és sempre el mateix nombre. Aquest nombre constant s'anomena **raó** de la progressió i es representa per r .

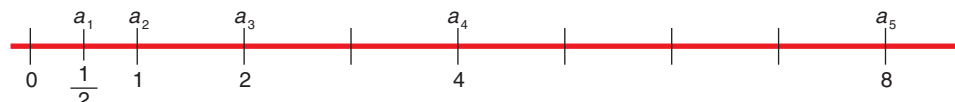
La successió de les potències naturals de 2 és una progressió geomètrica de primer terme 2 i de raó 2: 2, 4, 8, 16, 32...

Tipus de progressions geomètriques

Segons sigui el valor de la raó en cada progressió geomètrica tenim diferents tipus de progressió.

Progressions geomètriques amb $r > 1$

Si $a_1 > 0$ i la raó és més gran que 1, en multiplicar per un nombre més gran que 1 qualsevol nombre real positiu s'obté un nombre més gran, això és, cada terme de la progressió és més gran que l'anterior. La progressió és *creixent*. Per exemple, si $a_1 = \frac{1}{2}$ i $r = 2$, la progressió és: $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots$

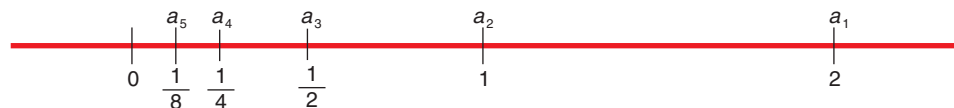


Si $a_1 < 0$ i $r > 0$, tots els termes de la progressió són negatius i la progressió és decreixent si $r > 1$ i creixent si $0 < r < 1$.

Progressions geomètriques amb $0 < r < 1$

Que la raó sigui un nombre comprès entre 0 i 1 vol dir que en formar la progressió cada terme és més petit que l'anterior si $a_1 > 0$. La progressió és **decreixent**.

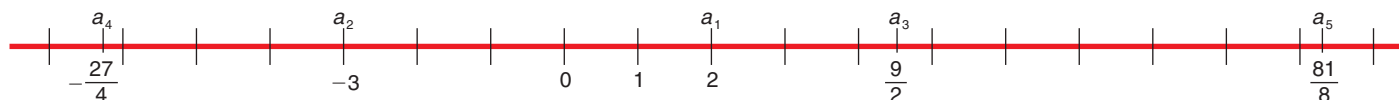
Per exemple: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ és decreixent, $a_1 = 2$ i $r = \frac{1}{2}$.



Progressions geomètriques amb $r < 0$

En multiplicar cada terme pel nombre negatiu que és la raó, el signe dels termes consecutius s'alternarà si $a_1 > 0$. Per exemple, si $r = -\frac{3}{2}$ i $a_1 = 2$, tenim:

$$2, -3, \frac{9}{2}, -\frac{27}{4}, \frac{81}{8} \dots$$



Si $r = 1$, tots els termes de la progressió són iguals.

Terme general

Utilitzant la llei de formació dels termes d'una progressió geomètrica podem obtenir l'expressió del terme general.

Considerem la progressió geomètrica de termes: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ de raó r . Per la definició tenim:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r = a_1 r r = a_1 r^2 \\ a_4 &= a_3 r = a_1 r^2 r = a_1 r^3 \\ a_5 &= a_4 r = a_1 r^3 r = a_1 r^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Es pot observar que l'exponent de r en cada cas és una unitat inferior al subíndex del terme que es considera.

En general, per a un terme que ocupi el lloc n , tenim:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

En l'exemple amb el qual hem començat aquest apartat, tenim: $a_1 = 2$ i $r = \frac{1}{2}$.

L'expressió del terme general en aquesta progressió geomètrica és: $a_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

El terme desè és: $a_{10} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{256}$.

Interpolació geomètrica

Donats els nombres 6 i 96 es volen interpolar tres termes de manera que els cinc formin una progressió geomètrica.

Podem considerar $a_1 = 6$ i $a_5 = 96$. Ens cal conèixer la raó de la progressió per determinar els tres termes intermedis. Escrivim l'expressió de a_5 :

$$a_5 = a_1 r^4 \rightarrow 96 = 6 r^4 \rightarrow r^4 = \frac{96}{6} = 16 \rightarrow r^4 = 16$$

Tenim dues solucions de l'equació, $r = 2$ i $r = -2$, que són dos valors que verifiquen $2^4 = 16$ i $(-2)^4 = 16$.

Per a $r = 2$, els termes buscats s'obtenen multiplicant 6 per 2 successivament. Són: 12, 24 i 48.

Els cinc termes de la progressió són: 6, 12, 24, 48 i 96.

Per a $r = -2$, els termes buscats són:

$$-12, 24 \text{ i } -48$$

Els cinc termes de la progressió són: 6, -12, 24, -48 i 96.

Producte de n termes consecutius

Considerem els sis termes de la progressió geomètrica: 3, 6, 12, 24, 48 i 96.

Pots comprovar que el producte $a_1 \cdot a_6 = 3 \cdot 96 = 288$ és el mateix que s'obté en multiplicar dos termes equidistants del primer i el sisè. És a dir,

$$a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4 = 288$$



El raonament és semblant al que s'ha fet en les progressions aritmètiques. El que allà era suma, aquí és producte.

El producte de dos termes equidistants d'altres dos és igual al producte d'aquests termes.

El producte de dos termes equidistants dels extrems és igual al producte d'aquests extrems.

Si la progressió té un nombre imparell de termes, el producte dels extrems és igual al quadrat del terme central.

Vegem com es pot calcular el producte de n termes consecutius P_n utilitzant la propietat que acabem de comprovar. Considerem una progressió geomètrica de termes positius i el seu producte:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Per la propietat commutativa de la multiplicació aquesta expressió també es pot escriure de la manera següent:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multipliquem membre a membre les dues igualtats anteriors tot agrupant els termes equidistants per mitjà de la utilització de la propietat associativa:

$$\begin{array}{l} P_n = a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \cdot a_n \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \dots a_2 \cdot a_1 \\ \hline P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \dots (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1) \end{array}$$

Tots i cada un dels productes de cada parèntesi són iguals i n'hi ha n . Això ens permet escriure l'expressió següent:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \rightarrow P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

El producte de n termes consecutius d'una progressió geomètrica s'obté fent l'arrel quadrada del producte de dos termes equidistants dels extrems elevat a n . Els dos termes equidistants dels extrems poden ser el primer i l'últim, tal com apareix en l'expressió del producte.

exemple 7

El terme sisè d'una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{3}$ és 1. Calcula a_8 .

Resolució

Escrivim l'expressió del terme sisè:

$$a_6 = a_1 r^5 \rightarrow 1 = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = a_1 \frac{1}{3^5} \rightarrow 1 = a_1 \frac{1}{3^5} \rightarrow a_1 = 3^5$$

Ara l'expressió de a_8 és:

$$a_8 = a_1 r^7 \rightarrow a_8 = 3^5 \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Es podia obtenir directament a_8 a partir de a_6 sense calcular prèviament a_1 .

N'hi ha prou amb observar que $a_8 = a_6 r^2 \rightarrow a_8 = a_6 r^2 = 1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

exemple 8

El producte de cinc termes d'una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{2}$ és 1. Escriu els termes de la progressió.

Resolució

Pel fet que es tracta d'una progressió de cinc termes, es verifica que a_3 , el terme central, equidista de a_1 i a_5 i que: $a_3^2 = a_1 \cdot a_5$. Escrivem l'expressió del producte:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \rightarrow 1 = \sqrt{(a_3^2)^5} \rightarrow 1 = \sqrt{a_3^{10}} = a_3^5 \rightarrow a_3 = 1$$

D'altra banda: $a_3 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow 1 = a_1 \cdot \frac{1}{4} \rightarrow a_1 = 4$.

Multiplant $a_1 = 4$ successivament per la raó $\frac{1}{2}$, s'obtenen tots els termes:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

Observa que si consideres aquests nombres en ordre invers, estan en progressió geomètrica de raó 2, precisament l'invers de $\frac{1}{2}$.



18. Una progressió geomètrica té de raó 3 i el primer terme és 5. Escriu l'expressió del terme general. Calcula a_8 utilitzant l'expressió obtinguda.

19. El desè terme d'una progressió geomètrica és 1 000 000 i la raó és 10. Calcula el primer terme.

20. Escriu les vuit primeres potències naturals de 2. Formen una progressió geomètrica? Comprova que es verifica que: $a_2 \cdot a_7 = 512$. Indica tots els parells de termes que tenen aquest producte. Expressa en forma de potència de 2 el producte dels vuit termes.

21. Considera les dues progressions:

a) $a_1 = 2$ i $r = 4$

b) $a_1 = 12$ i $r = \frac{1}{3}$

Comprova, escrivint alguns termes consecutius, que la progressió a és creixent i la b és decreixent. Dóna una explicació d'aquest comportament.

22. Interpol·la tres nombres entre 3 i 768 de manera que els cinc termes formin una progressió geomètrica.



Suma de termes d'una progressió geomètrica

Considerem els n primers termes d'una progressió geomètrica de raó r i volem trobar una expressió que ens permeti calcular-ne la suma sense que calgui escriure tots els sumands.

La suma de n termes la representem per S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Multipliquem per r , la raó, els dos membres de la igualtat i obtenim:

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r$$

Tenint en compte que $a_1 \cdot r = a_2$, $a_2 \cdot r = a_3$, etc., podem escriure:

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot r$$

Calculem $r \cdot S_n - S_n$ restant els dos membres de les igualtats corresponents terme a terme:

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot r$$

$$-S_n = -a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{n-1} - a_n$$

$$r \cdot S_n - S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot r - a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{n-1} - a_n$$

$$r \cdot S_n - S_n = a_n \cdot r - a_1 \rightarrow S_n(r - 1) = a_n \cdot r - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

Observa que en l'expressió obtinguda per la suma només intervenen el primer terme, la raó i el nombre de termes n , ja que es pot substituir a_n per la seva expressió $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ i tindríem:

$$S_n = \frac{a_1 r^{n-1} r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

Apliquem aquesta expressió per calcular la suma dels deu primers termes de la progressió: 1, 3, 9, 27...

Identifiquem: $a_1 = 1$, $r = 3$ i $a_{10} = 1 \cdot 3^9 = 19\,683$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{19\,683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29\,524$$

Hem sumat deu termes d'una progressió geomètrica creixent, ja que $r = 3 > 1$.

L'expressió anterior de la suma es pot escriure també com: $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$.

I es pot utilitzar si la progressió és decreixent, ja que es verifica que: $a_n < a_1$.

Si en una progressió geomètrica decreixent de termes positius es consideren molts termes, aquests són cada cop més petits, de manera que arriba un moment en què pràcticament són zero i no afecten la suma de tots els termes.

Sumar els infinits termes d'aquestes progressions decreixents s'aconsegueix quan es considera $a_n = 0$. És la suma il·limitada.

Si expressem per S_i aquesta suma, tenim:

$$S_i = \frac{a_1}{1 - r}$$

Observa que en aquesta expressió només intervenen el primer terme i la raó de la progressió.

exemple 9

Troba la fracció generatriu del decimal periòdic $0,\widehat{16}$.

Resolució

Trobar la fracció generatriu d'un decimal periòdic ja s'ha fet en el curs anterior. Aquí us proposem fer-ho utilitzant la suma de les progressions geomètriques decreixents d'infinits termes.

El decimal periòdic indica que $0,\widehat{16} = 0,1616161616\dots$, que es pot expressar com una suma:

$$0,\widehat{16} = 0,16 + 0,0016 + 0,000016 + 0,00000016 + \dots$$

Com pots observar, tenim la suma de termes d'una progressió geomètrica decreixent de raó $r = 0,01$ i $a_1 = 0,16$. Podem aplicar l'expressió de la suma:

$$S_i = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0,16}{1 - 0,01} = \frac{0,16}{0,99} = \frac{16}{99}$$

La fracció generatriu buscada és $\frac{16}{99}$ i podem establir:

$$0,\widehat{16} = \frac{16}{99}$$

- 23.** Troba la suma dels sis primers termes d'una progressió geomètrica que té $a_1 = 3$ i $a_3 = 48$.
- 24.** El primer terme d'una progressió geomètrica decreixent és 81 i la raó és $\frac{1}{3}$. Calcula la suma de tots els termes.
- 25.** En una progressió geomètrica de raó 3, $a_6 = 243$, calcula la suma dels vuit primers termes.
- 26.** Calcula la suma de les primeres 10 potències naturals de 2.
- 27.** Dibuixa un quadrat de costat 1 dm i assenyala els punts mitjans de cada costat. Si uneixes aquests punts obtens un altre quadrat i, si ho fas successivament, aniràs obtenint quadrats cada vegada més petits. Calcula l'àrea dels tres primers quadrats. Formen les àrees una progressió geomètrica? Quina és la raó? Quina és la suma de totes les àrees dels quadrats que es podrien considerar?



Tendència d'una successió

Generalment, en posar exemples de successions, s'escriuen els primers termes. Anem a veure ara com es comporten les successions si escrivim termes avançats, és a dir, termes que corresponen a valors de n prou grans.

Estudiem el comportament d'algunes successions:

- a) En la successió $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$, el seu terme general és $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Estem davant d'una successió de termes positius i decreixent. Cada terme és inferior a l'anterior.

Calculem termes avançats, per exemple: $a_{20} = \frac{1}{2^{20}} = 0,000000953674\dots$

Pots comprovar que per escriure a_{100} caldria escriure 31 zeros abans de la primera xifra significativa dels decimals.

Podem dir que la **tendència** d'aquesta successió és que els seus termes s'acosten cada vegada més a 0.

- b) En la successió $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots$, el terme general és $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

La successió és creixent. Cada terme és més gran que l'anterior.

Calculem termes avançats:

$$a_{100} = \frac{201}{101} = 1,990099\dots$$

$$a_{1000} = \frac{2001}{1001} = 1,999000999\dots$$

Pots comprovar que el terme que ocupa el lloc un milió és 1,999999...

Podem dir que la tendència d'aquesta successió és que els valors dels termes avançats s'acosten cada vegada més a 2. Recorda que $1,\overline{9} = 2$.



Successió creixent:

$a_n < a_{n+1}$ si $a_{n+1} - a_n > 0$ per a qualsevol n .

Successió decreixent:

$a_n > a_{n+1}$ si $a_{n+1} - a_n < 0$ per a qualsevol n .

c) En la successió 10, 100, 1 000..., el seu terme general és $a_n = 10^n$.

La successió és creixent. Cada terme és més gran que l'anterior i els termes cada vegada són més grans. Per exemple, $a_{100} = 10^{100}$.

En aquesta successió no es veu que els valors dels termes es puguin acostar a un valor numèric determinat. Podem dir que, cada vegada, els termes successius són més grans.

Es diu que aquesta successió tendeix a **infinit**.

Les successions que tendeixen a un valor numèric s'anomenen **convergentes**.

Les successions a i b són convergents.

Les successions que tendeixen a infinit s'anomenen **divergents**.

La successió c és divergent.

La tendència d'una successió s'anomena el **límit** de la successió.

La successió de terme general $a_n = \frac{1}{2^n}$ té límit 0 i s'expressa per $\lim \frac{1}{2^n} = 0$

La successió de terme general $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ té límit 2 i s'expressa:

$$\lim \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

De manera semblant podem escriure: $\lim 10^n = \infty$.



Infinit es representa pel símbol ∞ .

activitats

28. Troba la tendència de cadascuna de les successions següents tot calculant termes avançats:

a) $a_n = \frac{3}{3n+10}$

b) $a_n = 5n - 50$

c) $a_n = \frac{3n+4}{n+4}$

d) $a_n = \frac{n^2}{n+8}$

29. Escriu l'expressió del terme general d'una progressió geomètrica de raó 2 i primer terme $\frac{1}{10}$. Calcula els termes a_{10} i a_{20} . Pots donar la tendència de la progressió?

30. En una progressió geomètrica decreixent de termes positius, quin és el límit de a_n ? Posa un exemple per comprovar la teva resposta.

31. Esbrina si els límits següents són correctes. Corregix els que no ho siguin:

a) $\lim \frac{1}{n+3} = 0$

b) $\lim \frac{n^2}{n+1} = 1$

c) $\lim \frac{100+n}{3n} = 3$

d) $\lim \frac{n}{2} = \infty$

e) $\lim \frac{1}{2n} = 0$



DE TOTS COLORS

Una successió que té per límit π

Considerem un cercle de radi 1 dm. L'àrea del cercle és $A = \pi r^2 = \pi \text{ dm}^2$.

En la circumferència de radi 1 dm inscrivim polígons regulars tal com pots veure en la figura. Quan augmentem el nombre de costats, les àrees dels successius polígons formen una successió creixent i tendeixen a ocupar tot el cercle. Verifiquem, amb alguns càlculs, que els termes de la successió de les àrees tenen tendència a apropar-se a π .

Representem per A_n l'àrea del polígon regular de n costats.

El quadrat inscrit en la circumferència de radi 1 dm té 2 dm de diagonal, ja que aquesta diagonal n'és un diàmetre. El costat del quadrat mesura $\sqrt{2}$ dm, i l'àrea, $A_4 = 2 \text{ dm}^2$.

Amb càlculs trigonomètrics senzills es pot calcular l'àrea de qualsevol polígon regular si tenim en compte que aquest polígon es pot descompondre en triangles isòsceles, en els quals els dos costats iguals són radis de la circumferència, en aquest cas $r = 1$ dm.

S'obtenen els valors següents aproximats a les mil·lèsimes:

- Hexàgon: $A_6 = 2,598 \text{ dm}^2$
- Octàgon: $A_8 = 2,828 \text{ dm}^2$
- Dodecàgon: $A_{12} = 3 \text{ dm}^2$
- Polígon regular de 20 costats: $A_{20} = 3,092 \text{ dm}^2$
- Polígon regular de 48 costats: $A_{48} = 3,113 \text{ dm}^2$
- Polígon regular de 96 costats: $A_{96} = 3,140 \text{ dm}^2$

Els nombres 2; 2,598; 2,828; 3; 3,092; 3,113 i 3,140 són termes d'una successió creixent de la qual no podem escriure una expressió del terme general, però sí que en podem calcular qualsevol terme. Aquesta successió té com a límit l'àrea del cercle, exactament el nombre π .

Aquest mètode exhaustiu del càlcul de l'àrea del cercle calculant àrees de polígons amb un nombre cada cop més gran de costats el va utilitzar **Arquimedes** (287-212 aC), que va donar l'aproximació de l'àrea del polígon de 96 costats i va establir que el valor de π es podia aproximar per $3 + \frac{10}{71}$ que, expressat en decimals, és aproximadament 3,14084507.

Aquesta aproximació és un nombre racional, però π és un nombre irracional.



Hi ha veus?

1. Contesta de manera raonada si són certes o falses les afirmacions següents:

- a) La diferència de dos nombres naturals és sempre un nombre natural.
- b) La diferència entre un terme d'una progressió aritmètica i l'anterior és constant en tota la progressió.
- c) La successió de terme general $a_n = \frac{1}{n^2}$ és una progressió geomètrica.
- d) El nombre $\frac{-5}{8}$ pertany a la successió de terme general $a_n = \frac{n-15}{n}$.

2. Escribe l'expressió del terme general de la successió dels nombres imparells.

3. Escribe tres termes més que segueixin als de cadascuna de les successions següents:

- a) $-5, -4, -2, 1, 5, 10, 16 \dots$
- b) $1, 8, 27, 64, 125 \dots$
- c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \dots$
- d) $0, 10, 21, 33, 46, 60 \dots$
- e) $-2, -6, -18, -54, -162 \dots$

4. Explica la llei de formació de cadascuna de les successions anteriors. Dóna l'expressió del terme general de les successions b) i c).

5. En una progressió aritmètica, $a_5 = 14$ i la diferència és 6. Escribe els deu primers termes de la progressió.

6. El primer terme d'una progressió aritmètica és 5 i la diferència és -5 . Calcula el terme sisè.

7. Troba un procediment per calcular la suma dels 100 primers múltiples de 5.

8. Observa aquesta successió, en la qual falta un terme:

1	5	6	11		28
---	---	---	----	--	----

Troba la llei de formació i escriu el terme que falta.

9. Una progressió geomètrica de raó 5 i de primer terme $\frac{1}{25}$, és creixent o decreixent? Escribe els primers termes per comprovar-ho.

10. En una progressió geomètrica, $a_{11} = 64$ i $r = 2$. Calcula a_1 i a_{12} .

11. Considera la successió $1, 4, 7, 10, \dots$. És una progressió? De quin tipus? Esbrina si 720 és un terme d'aquesta successió.

12. En una progressió geomètrica la raó és $\frac{1}{3}$.

La progressió és decreixent i la suma dels infinits termes és 1. Quin és el primer terme?

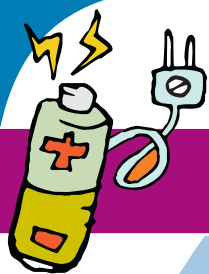
13. Una successió té de terme general $a_n = \frac{1}{3^n}$.

Escribe els cinc primers termes de la successió. Formen progressió d'algun tipus? Identifica quina progressió és.

14. Escribe la fracció generatriu de $2, \overline{16}$. Pots fer-ho utilitzant l'expressió de la suma d'una progressió geomètrica decreixent. Identifica en primer lloc la progressió.

15. Considera un quadrat de costat 1 dm. Dibuixa el quadrat que s'obté en unir els punts mitjans del quadrat anterior. Si el procés es repeteix successivament, quina és la suma dels perímetres de tots els quadrats?

16. Escribe els termes a_{500} i a_{1000} d'una successió de terme general $a_n = \frac{2}{n}$. Pots establir-ne la tendència?



Han:ga bateries

1. Contesta de manera raonada si són certes o falses les afirmacions següents:

- a) La divisió entre dos nombres naturals és sempre un nombre natural.
- b) 28 és un terme de la successió 2, 4, 6, 8...
- c) La successió anterior és una progressió geomètrica.
- d) Una progressió aritmètica de diferència 2 és creixent.
- e) L'expressió del terme general de la successió de l'apartat b és: $a_n = 2n + 1$.

2. Escriu els termes primer i desè de cadascuna de les successions següents:

- a) $a_n = \frac{5 + n}{n}$
- b) $a_n = \frac{2n^2 + 1}{3}$
- c) $a_n = -3n + 12$
- d) $a_n = \frac{n - 100}{n + 1}$

3. Considera la successió dels múltiples de 4. Quin és el primer terme? Formen una progressió? De quin tipus? Escriu l'expressió del terme general.

4. Considera la progressió aritmètica que té de terme general $a_n = 3n - 6$. Escriu els vuit primers termes i digues quina és la diferència de la progressió.

5. Els cubs dels nombres naturals formen una successió. Escriu els cubs dels sis primers nombres naturals i l'expressió del terme general de la successió.

6. Esbrina la llei de formació de la successió i escriu el nombre que falta:

2	3	5	9		23
---	---	---	---	--	----

7. Entre les successions següents, digues quines són progressions aritmètiques i indica el valor de la seva diferència:

- a) $-3, 0, 3, 6, 9, \dots$
- b) $1, 0, -1, -2, -3, \dots$
- c) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$
- d) $6, 8, 10, 12, \dots$
- e) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$

8. D'una progressió aritmètica es coneixen $a_2 = 8$ i $d = 3$. Escriu els cinc primers termes de la successió.

9. La successió dels nombres parells és una progressió. De quin tipus? Calcula la suma dels cent primers nombres parells.

10. En cadascuna de les dues voreres d'un passeig es planten arbres de manera que la distància entre dos arbres sigui 15 m. Quants arbres caldrà plantar si el passeig té una longitud de 690 m?

11. Troba els termes d'una progressió aritmètica de diferència 2, darrer terme 6 i que sumin 10.

12. El sou mitjà actual en una fàbrica és de 1500 € i cada any s'apuja el 2 % respecte de l'any anterior. Quin serà el sou d'aquí a 10 anys?

13. Esbrina si la successió $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ és una progressió geomètrica.

Quina és la raó? Calcula la suma dels 10 primers termes.

14. Troba termes avançats i dona la tendència de cadascuna de les successions que tenen els termes generals següents:

- a) $a_n = n^2 - 50$
- b) $a_n = n^3 - 10n$
- c) $a_n = \frac{2}{n} + 8$
- d) $a_n = \frac{n + 100}{n^3 + 1}$
- e) $a_n = \frac{3n - 5}{n + 4}$



A tota mèquina

1. Per numerar les 500 pàgines d'un llibre cal escriure força xifres. Troba un procediment raonat per calcular quantes xifres caldrà escriure.

2. Calcula la suma dels múltiples d'11 de quatre xifres.

3. En una progressió aritmètica, el terme que ocupa el lloc 15 val 37 i el terme de lloc 24 val 49. Troba l'expressió del terme general de la progressió.

4. En una progressió geomètrica el primer terme és 1 i la raó $\sqrt{3}$. Troba el terme novè i la suma dels 25 primers termes. Expressa els resultats d'una manera exacta.

5. Considera les progressions geomètriques següents:

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{8}, \dots$

b) $0,1; 0,01; 0,001, \dots$

c) $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

d) $\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{35}, \dots$

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots$

Troba la raó de cada progressió, l'expressió del terme general i la suma quan sigui possible. Explica per què en algun cas no se'n pot calcular la suma.

6. Calcula el valor de n perquè es verifiqui:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 4095.$$

7. Troba a perquè les expressions $a; 6a - 1; 2a + 2 \dots$ siguin els primers termes d'una progressió aritmètica i comprova que el vuitè terme és 9.

8. El *Papyrus Rhind* és un llibre egipci molt antic en el qual es pot llegir l'enunciat del problema següent: «Es reparteixen 100 pans entre cinc homes de manera que el primer rep tant menys que el segon com aquest del tercer, i com el tercer del quart i el quart del cinquè. Quina és la diferència de porció? Quants pans rep el tercer home?» Resol el problema.

9. Troba quants múltiples de 17 tenen quatre xifres. Quin és el més gran? I el més petit?

Calcula'n la suma de tots.

10. La suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada decreixent és 2 i la raó, $\frac{1}{2}$. Calcula el primer terme.

11. Calcula el producte de les deu primeres potències de 2.

12. Troba la suma de les àrees de tots els triangles equilàters que es poden considerar a partir d'un de costat 1 dm i sabent que els successius són els que determinen els punts mitjans dels costats del triangle anterior.

13. Considera les successions següents donades per l'expressió del terme general. Troba, en cada cas, el límit de la successió. Considera el comportament de termes avançats.

a) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

b) $a_n = \sqrt{n - 50}$

c) $a_n = 100n + n^2$

d) $a_n = \frac{90}{n^3}$

14. Es llança verticalment enlaire una pilota, que en caure a terra va rebotant i cada vegada que rebot només arriba als tres quarts de l'altura del bot anterior. Calcula la longitud total del recorregut de la pilota si sabem que en el primer llançament va arribar als 8 m d'altura.

15. El setè nombre triangular és:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Troba una expressió, en funció de n , que et permeti calcular l'enèsim nombre triangular i, per tant, qualsevol altre.