

Angles i triangles.



Recordeu que un angle de 180º equival a un de π rad.

1. Quants radians mesura un angle de 45º? I un de 180º? I un de 270º?

2. Completa la taula següent:

Radians	1		π/2		0,67		2π/5
Graus		120º		135º		1º	

3. Quin angle és més gran, un que mesura 4π/5 radians o un de 120º?

4. Quants graus són 3π/7 radians?

5. Indica quines de les següents igualtats són certes:
   45º=π/2 rad 90º=π/2 rad 180º=2π rad 45º=π/4 rad
   60º=π/3 rad 150º=5π/3 rad 30º=π/6 rad

6. Expresseu en radiants els angles:
   a) 30º b) 120º c) 270º
   d) 90º e) 150º f) 330º

7. Expresseu en graus els angles de:
   $a)\ 1\ rad$ $b)\ \frac{3\pi}{2}\ rad$ $c)\ \frac{7\pi}{18}\ rad$
   $d)\ \frac{2}{3}\ rad$ $e)\ \frac{\pi}{12}\ rad$ $f)\ \frac{\pi}{7}\ rad$

8. Ordeneu del més gran al més petit els angles següents:

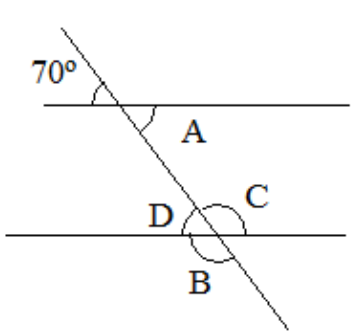
$$123^0\ ,\ \frac{3\pi}{4}\ rad\ ,\ \frac{2}{3}\ d'un\ angle\ recte\ ,\ 2{,}15\ rad$$

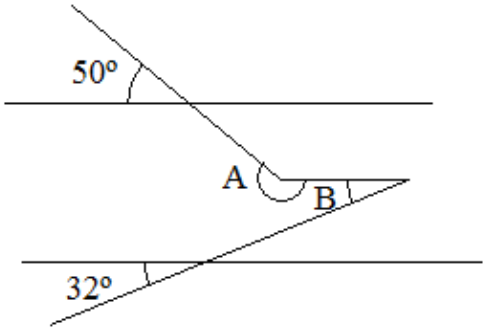
9. Calcula la mesura del complementari i del suplementari d'un angle de 28º.

10. A un angle li falten 34º per ser igual que el seu suplementari. Calcula'n la mesura.

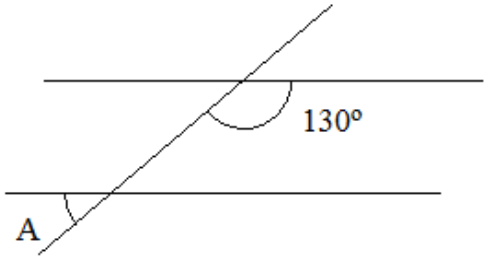


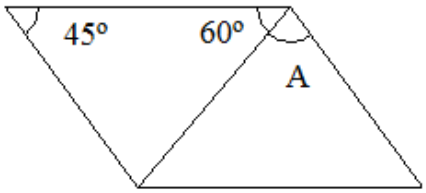
11. Calculeu els angles A, B, C i D

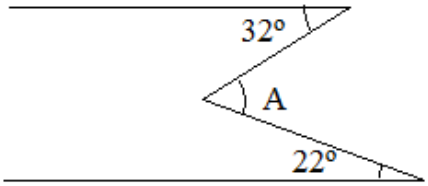


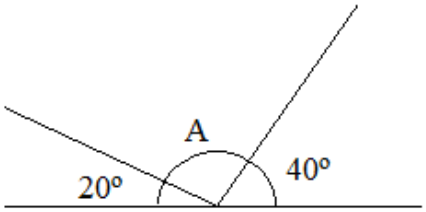


12. Calculeu el valor de l'angle A en cadascuna de les figures següents:

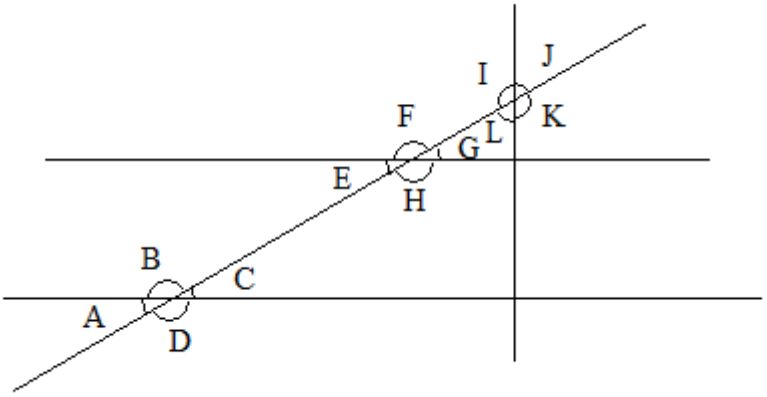








13. Agrupeu els angles de la figura segons els següents criteris:
    a) angles iguals
    b) angles complementaris
    c) angles suplementaris





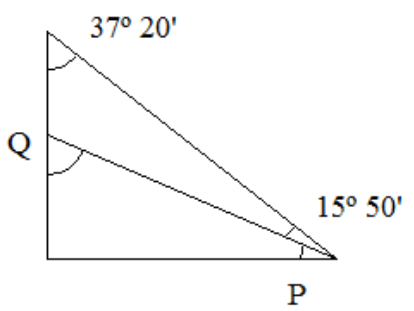
IMPORTANT

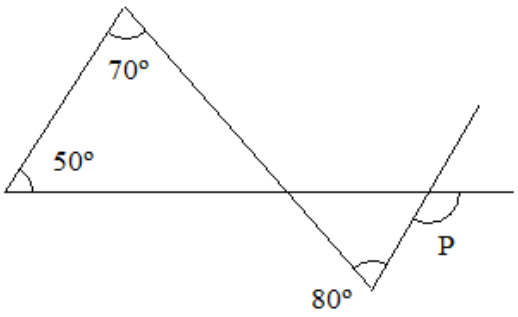
Els angles interiors d'un triangle sumen 180º.

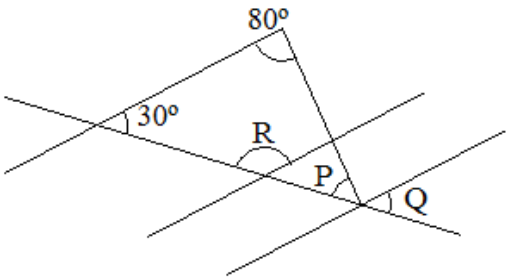
14. En els triangles següents, calculeu el valor de l'angle desconegut:

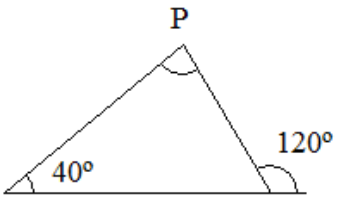
A	B	C
50º	72º	
84º		74º
3º	137º	
	73º	46º

15. Calculeu els angles P, Q i R

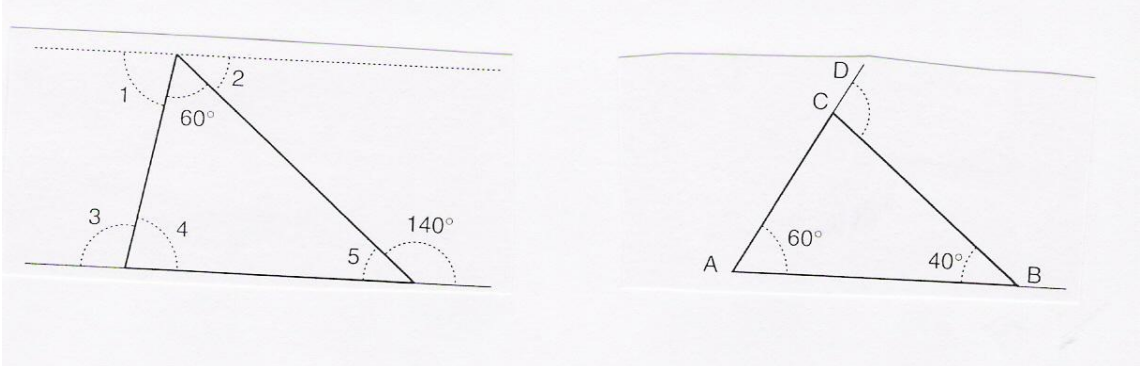








16. Determineu les mesures dels angles següents:





17. Quant sumen els angles aguts d'un triangle rectangle? Són complementaris o suplementaris?

18. Calcula la mesura de l'angle A de cadascun dels triangles de la figura.

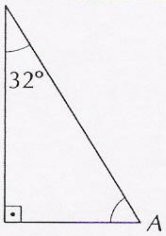


FIGURA 1

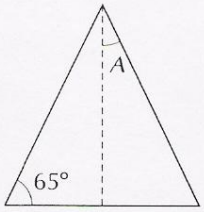


FIGURA 2

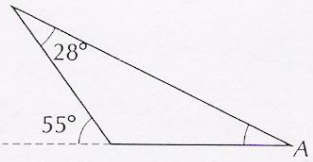


FIGURA 3

19. Busqueu la determinació principal i digueu en quin quadrant es troba cadascun dels angles següents:

$a)\ 1000^0$ $b)\ 375^0$ $c)\ 131\pi\ rad$

$d)\ -4441^0$ $e)\ 2013^0$ $f)\ \frac{77\pi}{3}\ rad$

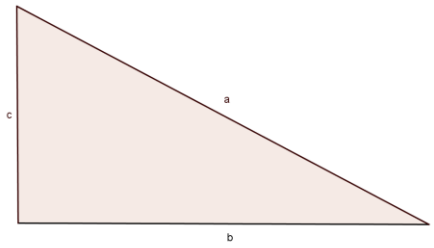
Solucionari:
1. π/4 rad; π rad; 3π/2 rad.
2. 2π/3 rad; 3π/4 rad; π/180 rad; 180/π°; 90°; 120,6π°; 72°
3. 4π/5 rad.
4. 73°
5. F; V; F; V; V; F; V
6. a) π/6 rad; b) 2π/3 rad; c) 3π/2 rad; d) π/2 rad; e) 5π/6 rad; f) 11π/6 rad
7. a) 57,3°; b) 270°; c) 70; d) 38,2°; e) 15°; f) 25,7°.
8. 3π/4 > 2,15 rad > 123° > 2/3 d'un angle recte.
9. 62° i 152 °
10. 73°
11. a) A=D=70°; B=C=110°; b) A=230°, B=32°
12. a) 50°; b) 75°; c) 54°; d) 120°
13. Iguals: A=C=E=G; B=D=F=H; I=K; J=L
    Complementaris: G=L
    Suplementaris: B i C; A i D; H i E; F i G; K i L; I i J
14. C=58°; B=22°; C=40°; D=61°
15. a) Q=53,1°, P=36,9°; b) P=140°; c) P=70°, Q=30°, R=150°; d) P=80°
16. a) 80°; 40°; 100°; 80°; 40° b) 100°
17. 90°; complementaris.
18. 58°; 25°; 27°
19. a) 280° (4rt); b) 15° (1r); c) π rad; d) 239° (3r); e) 213° (3r); f) 5π/3 rad (4rt)



Teorema de Pitàgores

IMPORTANT

En un triangle rectangle on a és la hipotenusa i b i c són els catets, es compleix que:

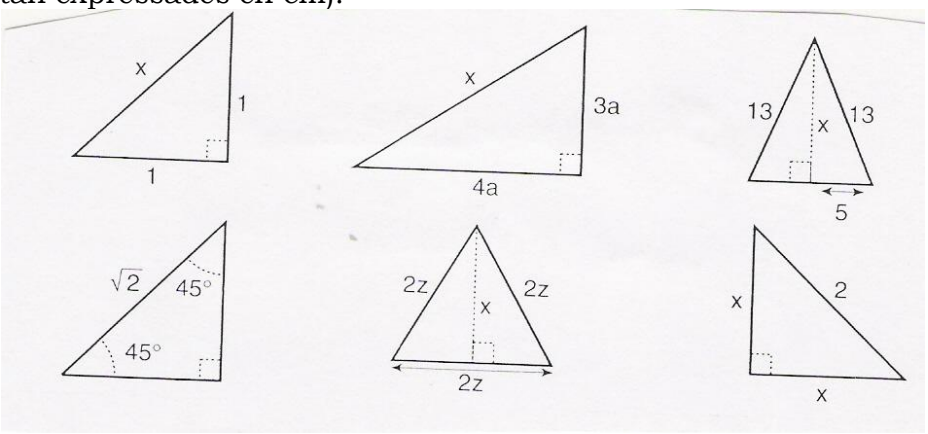


$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \quad a=\sqrt{b^2+c^2} \quad b=\sqrt{a^2-c^2} \quad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

20. La hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles mesura 5 cm. Esbrina les longituds dels catets i l'àrea del triangle.
(Sol: 3,5 cm i 6,25 cm²)

21. Calcula l'altura d'un triangle equilàter de 6 cm de costat.
(Sol: 5,2 cm)

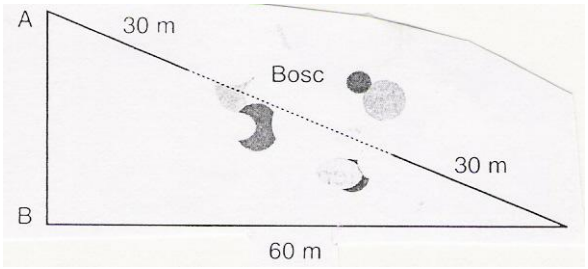
22. En els triangles rectangles següents, troba la longitud x (les mesures estan expressades en cm).



(Sol: 1,41 cm; 5a cm; 12 cm; 1 cm; 1,73z cm; 1,41 cm)

23. Calcula l'àrea del quadrat construït sobre un catet d'un triangle rectangle en què l'altre catet mesura 6 m i la hipotenusa 14 m.
(Sol: 160 m²)

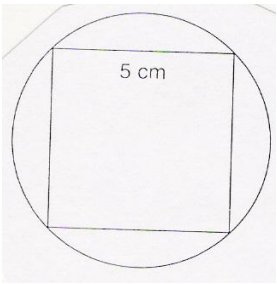
24. Sabent que l'amplada del bosc és de 20 m, alcula la distància AB.



(Sol: 52,9 m)



25. Donada la figura següent:



Calcula el diàmetre del cercle
(Sol: 7,07 cm)

26. Busca la diagonal d'un quadrat que té la mateixa àrea que un cercle de radi 10 cm.
(Sol: 25 cm)

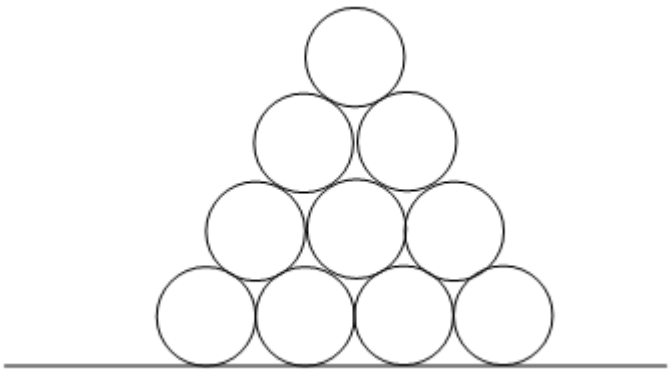
27. L'apotema d'un hexàgon reguilar mesura 7 dm. Calcula la longitud del costat de l'hexàgon.
(Sol: 8,08 dm)

28. Calcula l'àrea d'un triangle isòsceles sabent que el costat desigual mesura 9 cm, i un dels costats iguals, 23 cm.
(Sol: 101, 47 cm^2)

29. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 5 cm de costat. Recorda que el costat d'un hexàgon és igual al del radi de la circumferència en la qual està inscrit.
(Sol: 64,95 cm^2)

30. Una diagonal d'un rombe és 3/5 de l'altra i la suma de totes dues és 16 cm. Determina les diagonals, l'àrea i el perímetre d'aquest rombe. (Àrea=D*d/2)
(Sol: 30 cm^2 i 23,32 cm)

31. Es vol construir un celler per emmagatzemar bótes de vi de la forma com s'indica en el dibuix. Si d és el diàmetre de les bótes. Quina ha de ser l'altura del celler?
(Sol: 3,6·d)

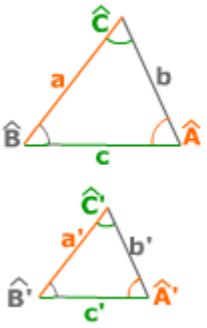




Semblança de triangles i teorema de Tales

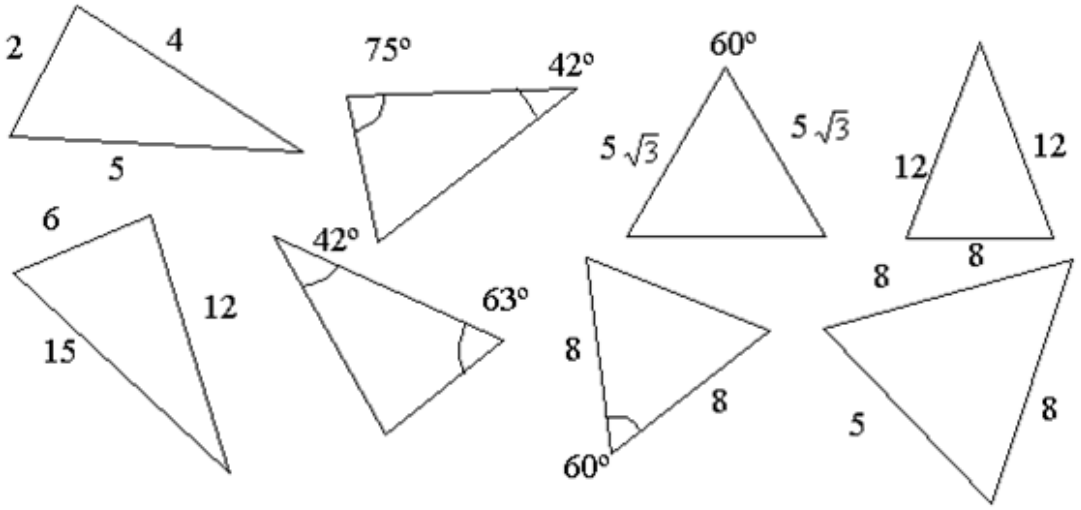
IMPORTANT

Dos triangles són semblants si compleixen algun dels següents criteris anomenats criteris de semblança.



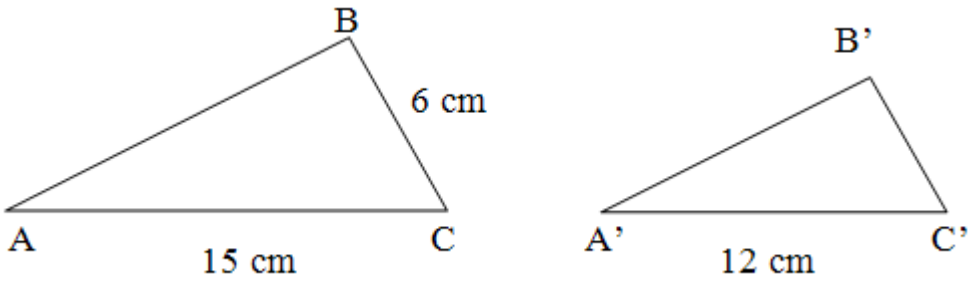
1. Angles iguals (amb dos n'hi ha prou)
   $\hat{A} = \hat{A}'$ i $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un angle igual i els costats que el formen proporcionals
   $\hat{A} = \hat{A}'$ i $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Costats proporcionals
   $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

32. De les següents parelles de triangles, quines ho són de triangles semblants?



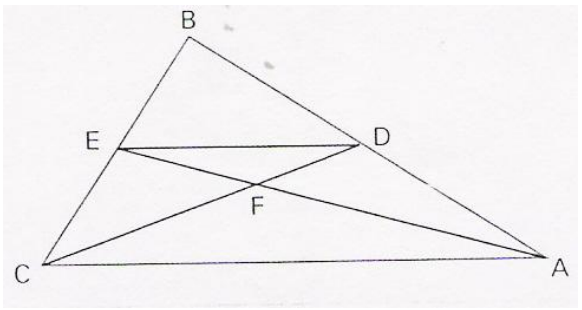
33. Tots els triangles isòsceles són semblants? I tots els rectangles? I tots els equilàters? I els rectangles isòsceles?

34. Els dos triangles de la figura són semblants, determineu la longitud del costat a'.

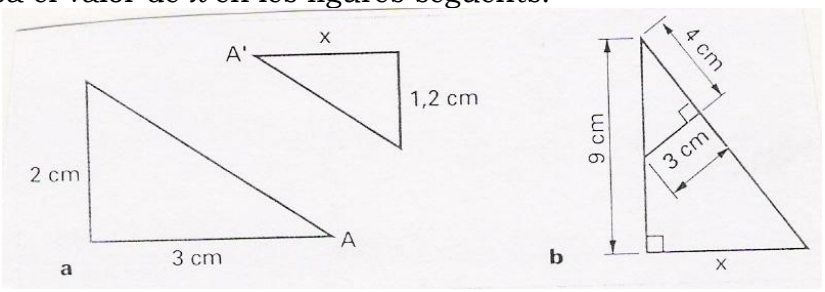


(Sol: 4,8 cm)

35. Enumera els triangles semblants que hi ha en la figura següent:



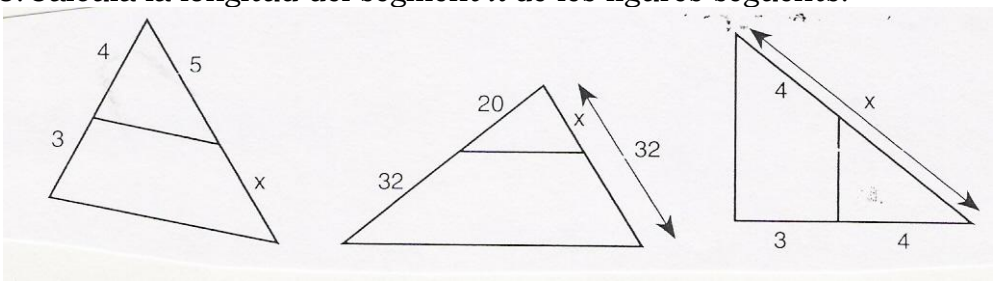
36. Troba el valor de *x* en les figures següents:



(Sol: x=1,8 cm; x=6,75 cm)

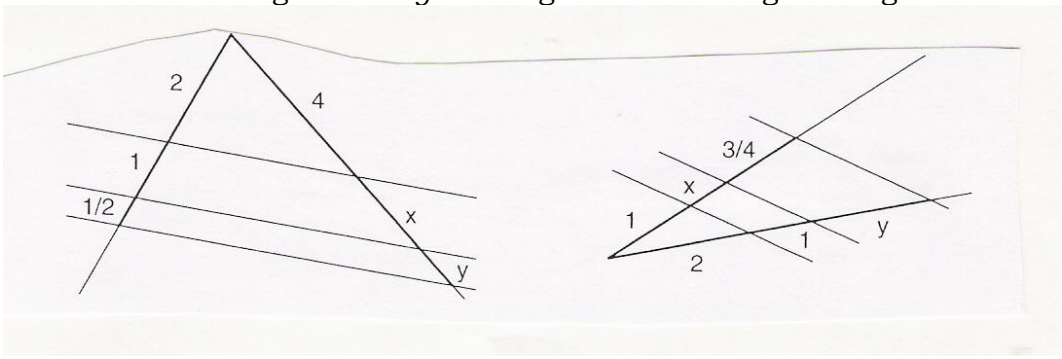
37. Si un bastó d'1 m projecta una ombra d'1,8 m, quina ombra projecta un arbre de 4,3 m en el mateix instant? Esbrina l'alçària d'un altre arbre que projecta una ombra de 8,2 m en aquell moment.
(Sol: 7,74 m; 4,56 m)

38. Calcula la longitud del segment *x* de les figures següents:



(Sol: x=3,75; x=12,3; x=9,3)

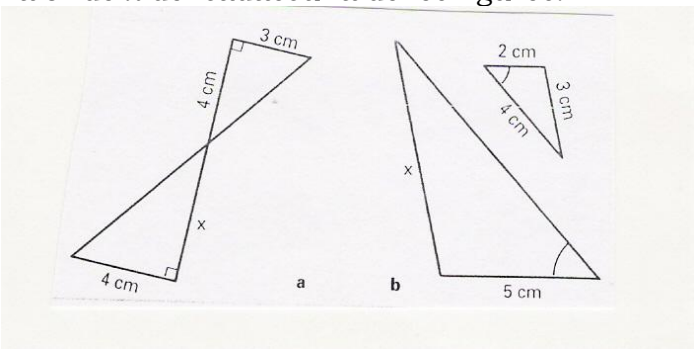
39. Calcula les longituds *x* i *y* dels segments de les figures següents:



(Sol: a) x=2, y=1; b) x=0,5, y=1,5)

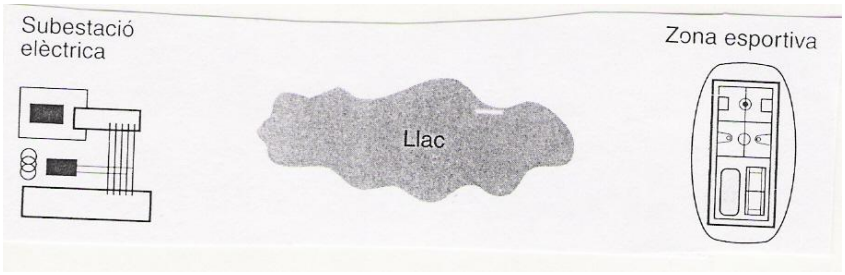


40. Troba el valor de x de cadascuna de les figures:

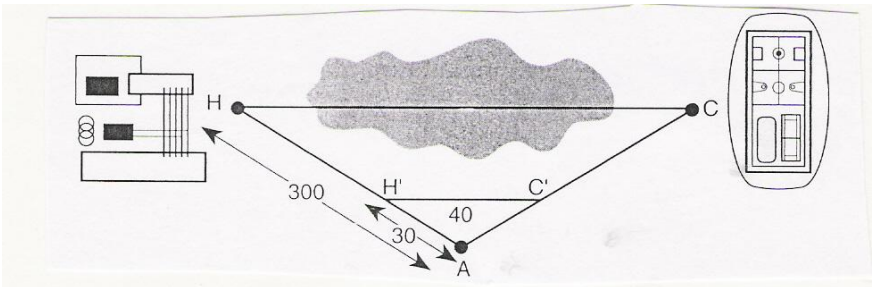


(Sol: 5,3 cm; 7,5 cm)

41. Una subestació elèctrica ha de subministrar corrent a una zona esportiva. Entre la subestació i la zona esportiva hi ha un llac que impedeix calcular directament la distància que els separa.

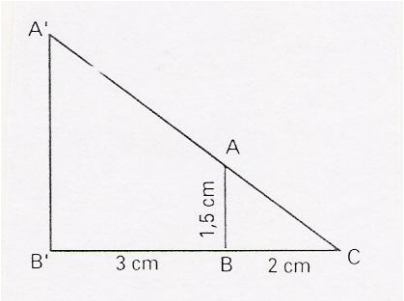


Per calcular aquesta distància s'han mesurat les distàncies següents:



Calcula la distància que separa la subestació elèctrica i la zona esportiva.
(Sol: 400 m)

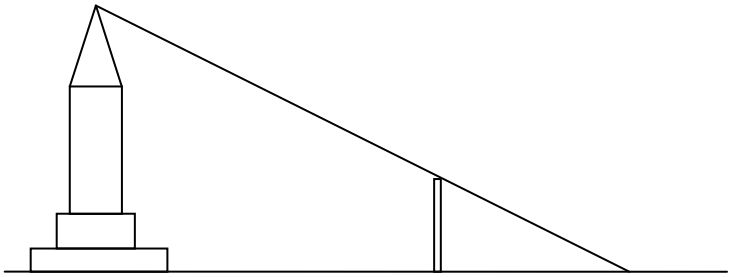
42. Calcula l'àrea del triangle CA'B' de la figura:



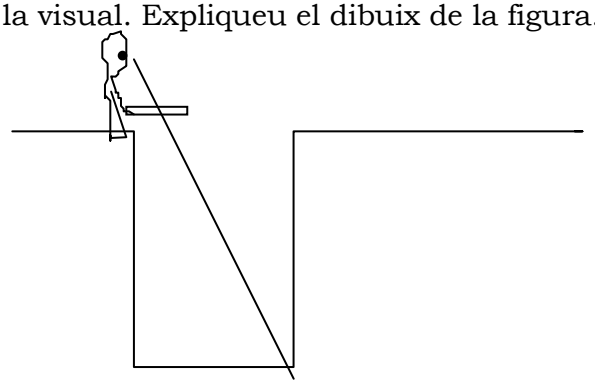
(Sol: 9,375 cm²)



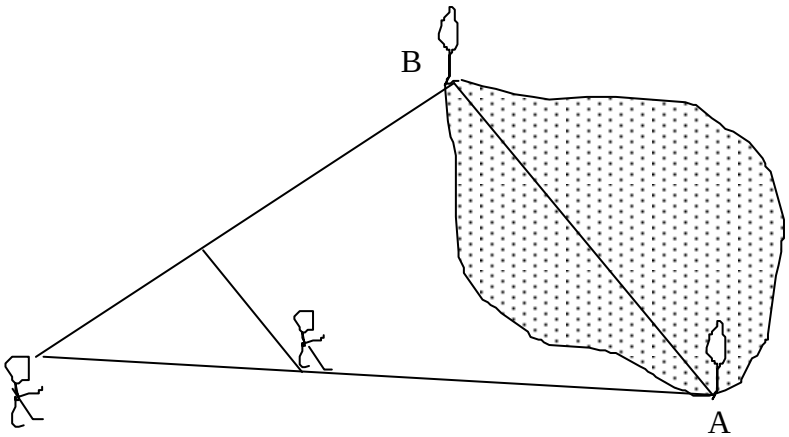
43. En un dia de sol es pot trobar l'altura d'un edifici, un arbre o qualsevol monument, fent servir la seva ombra i un bastó. Situeu el bastó en posició vertical, de manera que l'extrem de la seva ombra coincideixi amb l'ombra de l'objecte a mesurar. Sembla ser que el llegendari Tales va utilitzar aquest procediment per mesurar l'altura d'una piràmide. Expliqueu el dibuix.



44. També podeu calcular la profunditat d'un pou. Col·loqueu un regle en posició horitzontal a certa distància per sota del vostre cap. Mireu el fons del pou al costat oposat i fixeu-vos en el punt del regle on s'interseca la visual. Expliqueu el dibuix de la figura.



45. Mesurem l'amplada d'un llac. Fixeu-vos en dos punts oposats A i B de la vora del llac. Un amic es situa en la visual a A i camina paral·lelament a la línia AB, fins arribar a la visual a B. Interpreteu el dibuix i expliqueu com mesuraríeu l'amplada del llac.





Raons trigonomètriques



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c}{b} \qquad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{c}$$

46. Troba amb la calculadora:
    a) sin 50º
    b) sin 65º
    c) sin 20º
    d) sin 85º
    e) sin 25º
    f) sin 60º
    g) sin 3 rad
    h) sin π/3 rad
    i) sin π/5 rad

47. Troba amb la calculadora:
    a) cos 50º
    b) cos 65º
    c) cos 80º
    d) cos 10º
    e) cos 20º
    f) cos 85º
    g) cos 3 rad
    h) cos π/3 rad
    i) cos π/5 rad

48. Troba amb la calculadora:
    a) tg 50º
    b) tg 65º
    c) tg 80º
    d) tg 10º
    e) tg 20º
    f) tg 85º
    g) tg 3 rad
    h) tg π/3 rad
    i) tg π/5 rad

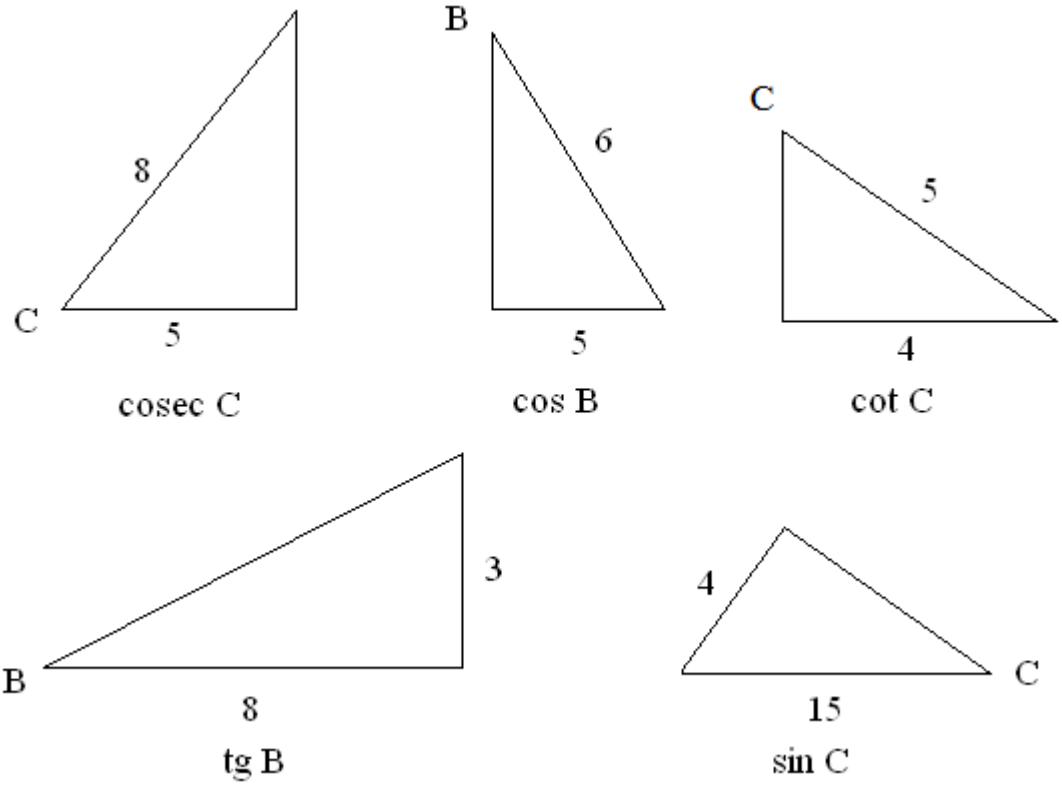
49. Utilitzant la calculadora determina (en graus i radiants):
    a) L'angle que té un sinus igual a 0,7.
    b) L'angle que té un cosinus igual a 0,3.
    c) L'angle que té una tangent igual a 0,7.

50. Amb l'ajuda de la calculadora, doneu el valor de l'angle agut tal que tingui la raó trigonomètrica que s'indica

    a) cos α = 0'8921
    b) tg β = 3'45
    c) sin α = 0'3435
    d) tg α = 1'3459
    e) tg β = 0'55
    f) sin α = 1'23

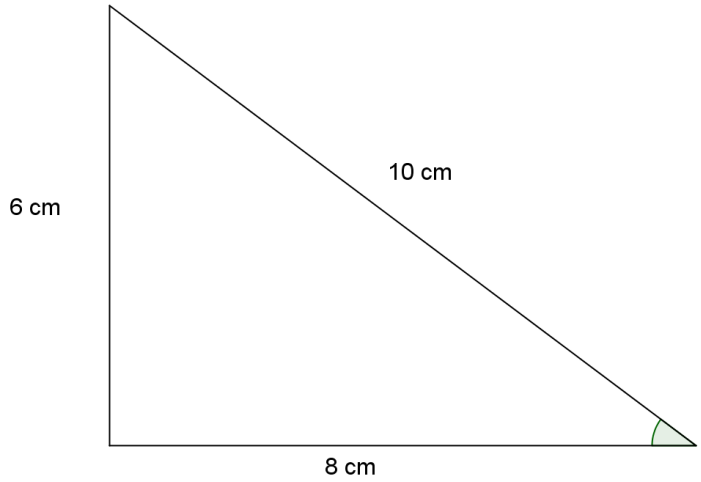


51. En els triangles rectangles següents, calculeu la raó trigonomètrica que s'indica i, amb ajuda de la calculadora, el valor de l'angle agut corresponent.



(Solució: a) 1,28; 51,3º; b) 0,553; 56,4º; c) 0,75; 53,1º; d) 0,375; 20,6º; e) 0,2667; 15,5º)

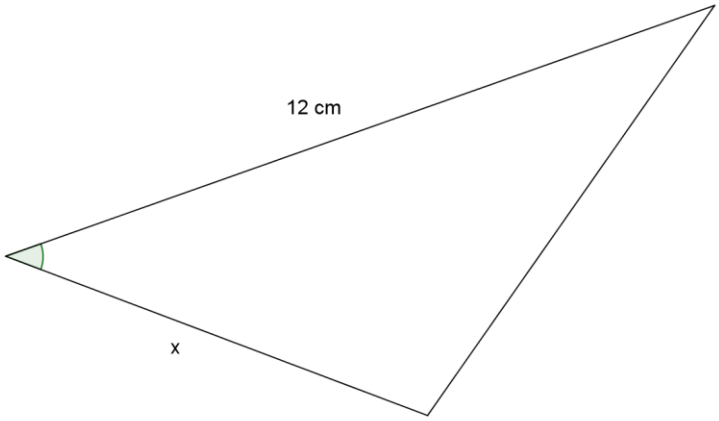
52. Calcula el sinus, cosinus i la tangent de l'angle α del triangle de la figura:



(Sol: sin α=0,6; cos α=0,8; tg α=0,75)



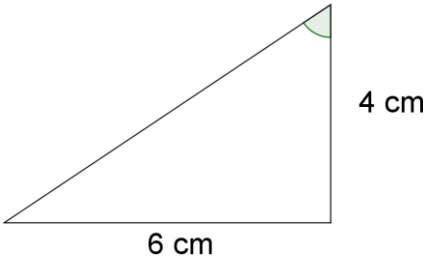
53. Sabent que cos $\alpha=3/5$, calcula el valor de x en el triangle rectangle de la figura. Calcula sin α i tg α.

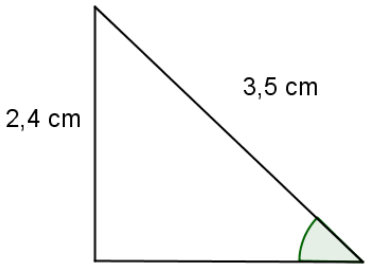


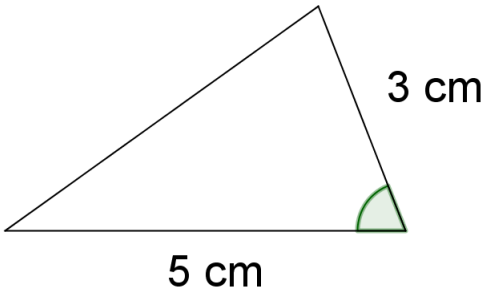
(Sol: sin α=0,8; tg α=1,33)

54. El sinus d'un angle agut, pot ser més gran que 1?

55. Troba les raons trigonomètriques dels angles dels triangles de la figura.







(Sol: a) sin α=0,832; cos α=0,555; tg α=1,5. b) sin α=0,686; cos α=0,729; tg α=0,941. c) sin α=0,8; cos α=0,6; tg α=1,33)



Resolució de triangles

56. Resol els següents triangles rectangles:
    a) a= 7 cm, b= 5 cm *(Sol: C=44,4º; B=45,6º; c=4,9 m)*
    b) a= 12 cm, c= 7 cm *(Sol: C=35'7º; B=54,3º; b=9,74)*
    c) b= 11 cm, C= 80º *(Sol: B=10º; c=62,4 m; a=63,3 m)*
    d) a= 10 m, b= 3 m *(Sol: B=17,5º; C=72,5º; c=9,51 m)*
    e) a= 11 m, c= 6 m *(Sol: b=9,22 m; C=33º; B=57º)*
    f) b= 10 cm, C= 75º *(Sol: B=15º; a=36,6 cm; c=37,3 cm)*
    g) a= 20 m, C= 40º *(Sol: B=50º; b=15,3; c=12,4)*
    h) b= 5 cm, c= 7 cm *(Sol: a=8,6 cm; B=35,5º; C=54,5º)*
    i) c= 7 cm, C= 30º *(Sol: B=60º; a=14 cm; c=12,12 m)*
    j) a=4 cm, C= 21º *(Sol: B=69º; b=3,73 cm; c=1,43 cm)*
    k) b= 11 m, c= 3 m *(Sol: a=11,4 m; C=15,3º; B=74,7º)*
    l) c= 2 m, C= 43º *(Sol: B=47º; a=2,93 m; b=2,14 m)*
    m) a= 10cm, B= 52º *(Sol: C=38º; b=7,88 m; c=6,16 m)*
    n) b= 3 cm, B= 35º *(Sol: C=55º; a=5,23 m; c=4,28 m)*
    o) c= 12 m, B=42º
    p) a= 12 cm, B= 45º
    q) b= 55 cm, B=52º
    r) c= 10 cm, B= 50º

57. Des d'un vaixell es veu el punt més alt d'una muntanya amb un angle de 30º; sabent que la distància d'aquest punt al vaixell és de 8.520 m, calcula l'altura de la muntanya sobre el nivell del mar.
    (Sol: 4260 m)

58. En Bernat veu el punt més alt de la torre del campanar del seu poble amb un angle de 63º. Sabent que es troba a 18 m de la base de la torre, troba l'altura de la torre. (En Bernat medeix 2 m).
    (Sol: 37,3 m)

59. La hipotenusa d'un triangle rectangle fa 12 m i un catet fa 6 m. Resol el triangle.
    (Sol: c=10,4 m; B=30º; C=60º)

60. Calcula l'àrea d'un triangle isòsceles, sabent que els costats iguals fan 11 m cadascun i que l'angle comprès és de 40º.
    (Sol: 38,7 m^2)

61. La base d'un triangle isòsceles fa 12 cm i l'angle oposat 30º. Troba el perímetre i l'àrea.
    (Sol: p=58,4 cm; A=134 cm^2)

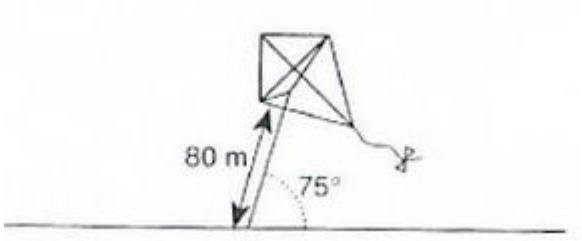
62. Troba la longitud de l'ombra que deus fer quan els raigs del Sol tenen una inclinació de 32º.

63. Amb quin angle es veu un edifici de 20 m d'alçada, des d'un punt que dista 15 m de l'edifici?
    (Sol: 53º)



64. Calcula l'alçada d'un arbre sabent que projecta una ombra de 2 m sobre el terra horitzontal quan l'angle del Sol és de 22º.
(Sol: 0,8 m)

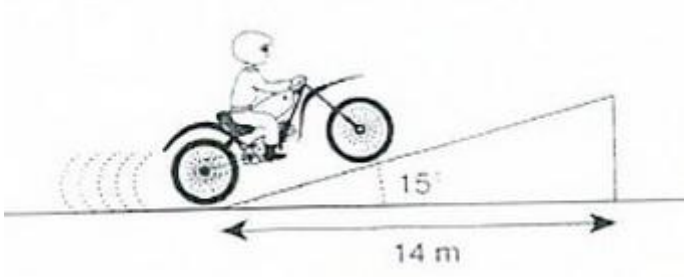
65. Un estel està subjectat a terra per un cordill de 80 m de llarg. El cordill forma amb l'horitzontal, és a dir amb el terra, un angle de 75º. A quina altura es troba l'estel?



(Sol: 77 m)

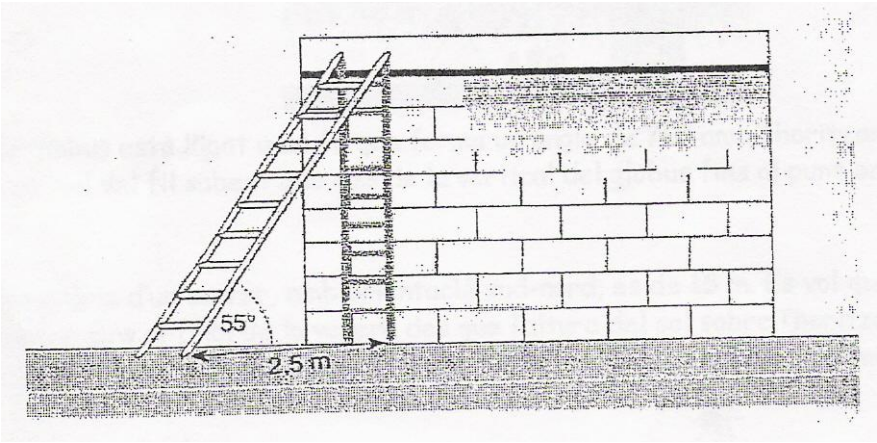
66. En un triangle rectangle la hipotenusa mesura 7 m i un dels angles aguts és de 40º. Troba el catet oposat.
(Sol: 4,5 m)

67. La rampa d'acrobàcies on entrena el Marc Márquez té una inclinació de 15º i ocupa una longitud horitzontal de 14 m. Quina llargada té? Des de quina alçada salta el Marc Márquez?



(Sol: 14,5 m; 3,75 m)

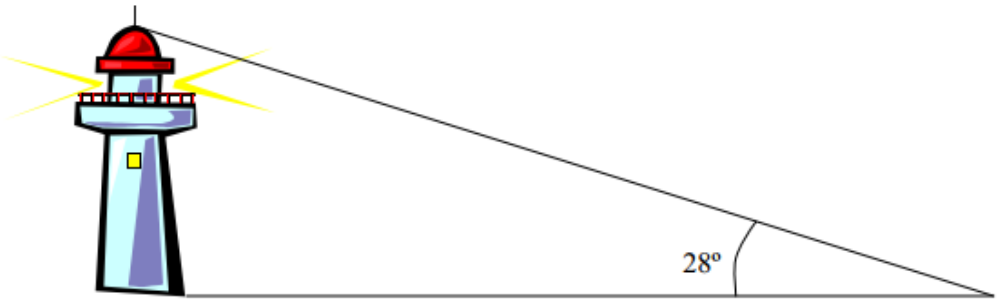
68. Un pintor deixa una escala recolzada sobre una paret i formant un angle de 55º amb el terra. A quina altura del terra està recolzada l'escala, si la distància fins a la paret és de 2,5 m? Quina llargada fa l'escala?



(Sol: 3,57 m; 4,36 m)



69. Des d'un veler s'observa el punt més alt d'un far sota un angle de 28º. Se sap que el far té una alçada de 25 m. A quina distància es troba el veler de la costa?

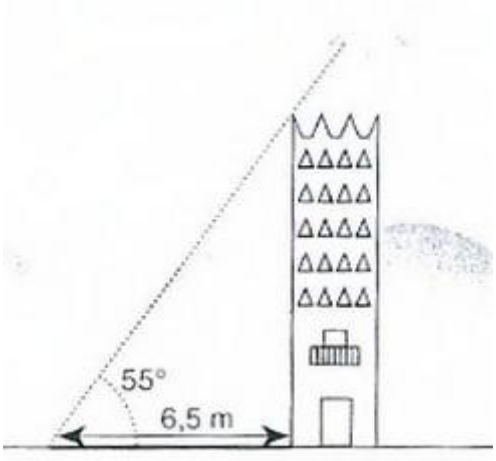


(Sol: 47 m)

70. Al Carrefour hi ha una rampa per poder traslladar els carretons fàcilment al pàrking. La rampa té una inclinació de 17º i ocupa una longitud horitzontal de 12,5 m. Quina llargada té?
(Sol: 13 m)

71. La torre de control d'un aeroport té una altura de 30 m. En el moment en què un avió comunica que és a una altura de 1.000 m, l'angle d'observació (angle que forma la visual amb l'horitzontal) és de 30º. A quina distància de la torre es troba l'avió?
(Sol: 1940 m)

72. L'altura del sol sobre l'horitzó és de 55º i l'ombra d'una torre, en aquell moment, és de 6,5 m. Quina és l'altura de la torre?

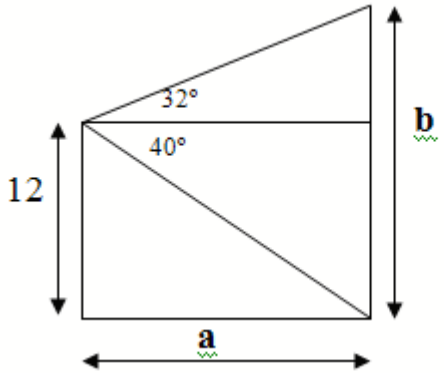


(Sol: 9,28 m)

73. Un globus està lligat a un fil que forma un angle de 70º amb l'horitzontal. Calcula la longitud del fil sabent que des de la vertical del globus fins al punt on és lligat hi ha 12 m.
(Sol: 35,1 m)

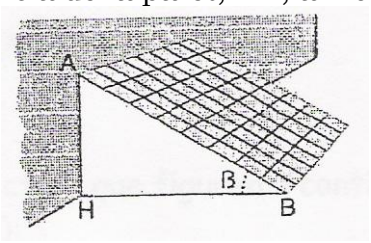


74. Calculeu les dimensions de *a* i *b* de la figura:



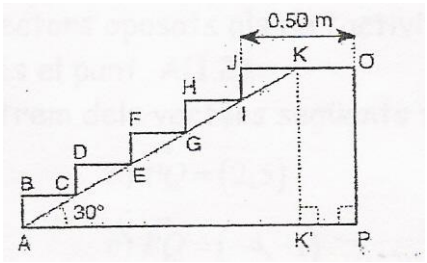
(Sol: a=14,3; b= 21)

75. Es vol instal·lar en una terrassa de Lleida un pannell solar quadrat, de costat 3 m. El constructor, per norma, recomana instal·lar-lo de manera que formi amb el pla horitzontal un angle inferior en 10º a la latitud del lloc escollit. La latitud de Lleida és aproximadament de 41º.
    a) Quin angle es prendrà com a angle d'inclinació del pannell?
    b) A quina altura AH del terra arribarà el pannell?
    c) Fins quina distància de la paret, HB, arribarà?



(Sol: a) 31º; b) 1,55 m; c) 2,57 m)

76. El dibuix mostra una escala de jardí. K és el punt mig del segment JO.
    a) Calcula la llargada AK.
    b) Calcula l'altura de l'escala OP.



(Sol: a) 1,44 m; b) 0,72 m)



77. En Bernat vol assegurar-se bé de l'alçada del campanar del problema 47. Des d'un punt veu el campanar amb un angle de 75º, després se'n va 30 m endarrera i el veu amb un angle de 42º. Quina altura li dóna ara el campanar?
(Sol: 35,6 m)

78. En Bernat se'n va a pescar. Està descansant a la vora del riu i veu un roure, just a l'altre marge del riu amb un angle de 72º. Se'n va 22 m endarrera i el veu amb un angle de 40º. Calcula l'alçada del roure i l'amplada del riu.
(Sol: 8,24 m; 25,4 m)

79. Des de dos punts de la platja de Castelldefels que disten 1,5 km observem un vaixell amb visuals de 39º i 52º respecte a la línia recta que uneix els dos punts. Troba la distància del vaixell a la platja.
(Sol: 0,74 km)

80. Des de dos punts A i B d'un camp d'aviació, distants 250 m l'un de l'altre, dos observadors troben que els angles d'elevació d'un avió situat en el mateix pla vertical que ells són de 80º i 88º respectivament. Determineu la distància a què es troba l'avió de l'observador del punt A.
(Sol: 1201,7 m)

Breu història de la trigonometria

La paraula *trigonometria* significa "mesura de triangles" ja que serveix per resoldre triangles, és a dir, per calcular elements desconeguts a partir d'elements coneguts. S'utilitza per primer cop el 1595 en una exposició de **Bartholomeus Pitiscus**, però el seu origen és molt més antic. Hi ha moltes aplicacions que justifiquen el desenvolupament de la trigonometria: càlcul de distàncies, predicció d'eclipsis, confecció de calendaris, elaboració d emates, construcció d'obres, cartes de navegació.... Per exemple, **Erastòtenes** obté la mesura del radi terrestre mitjançant càlculs trigonomètrics i **Èudox** les distàncies de la Terra a la Lluna i al Sol. Al segle VI aC es té constància que s'utilitzen tècniques de triangulació per construir el famós **túnel de Samos**, necessari per portar l'iagua des del mont Castro a la ciutat. Els **egipcis** la van fer servir per la construcció de piràmides, per tal que el pendent de les quatre cares fos igual.

La unitat de mesura d'angles, el grau, prové dels babilonis. Els **babilonis** van suposar que l'any tenia 360 dies i van prendre com a mesura angular "el recorregut diari del Sol al voltant de la Terra".

En els tractats d'astronomia dels segles V i VII ja comencen a sortir els paraules sinus, cosinus, secant i cosecant. Al segle X els **àrabs** publiquen el primer tractat de trigonometria (copiat dels hindús!) com a ciència matemàtica i s'introdueix a Occident a través dels musulmans d'Al-Andalus. El més important va sewr **Ibn-Yunus**.

Els hindús deien *jya* i *kojya*. Els àrabs que no usaven vocals ho van escriure com *jyb*. Aleshores, els primers traductors llatins van confondre la paraula amb *jaib*, que significava escot i així va ser traduïda al llatí com *sinus*, que significa pit... el nom original en hindú significava corda...

Finalment, al trigonometria amb la notació que l'expliquem avui és escrita pel matemàtic francès **François Viète**.