- **Nombres racionals**

1. Calculeu el valor del paràmetre a en cada un dels casos següents:

$$a)\quad \frac{\left(2-\frac{1}{3}\right)-\left(a-\frac{1}{2}\right)}{a+\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{7}{8}$$

$$b)\quad \frac{\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)}{3+\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}}=\frac{5}{16}$$

$$d)\quad \left(4\,\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)}{\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}+a\right)^3=8$$

$$e)\quad \left(a+6\,\frac{\left(1-\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)^2-\left(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^2+2}{1+\frac{1}{2-\frac{1}{3}}}\right)^2=9$$

$$f)\quad \left(a+\frac{\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)}\right)^4=16$$

Solucions :		
$(a)\quad a=1$	$(b)\quad a=2$	
$(c)\quad a=1$	$(d)\quad a=2\quad;\quad a=8$	$(e)\quad a=1\quad; a=-3$

El senyor que presideix el dossier és el matemàtic rus **Georg Cantor** (1845-1918), qui posà ordre en els conjunts numèrics. Acabà la seua vida en un hospital psiquiàtric per culpa d'unes depressions conseqüència dels seus treballs matemàtics.

- **Potències**

$a^0 = 1$	$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$a^1 = a$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	Base negativa i exponent parell resultat positiu: $(-3)^2=9$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$	Base negativa i exponent senar resultat negatiu: $(-4)^3=-64$
$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	I compte que $(-3)^2=9$ no és el mateix que $-3^2=-9$

2. Escriviu en forma de potència:

a) $$\frac{27^{-2}\left(\frac{1}{9}\right)^3 81^4}{9^2\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\left(\frac{1}{27}\right)^2} =$$

b) $$\frac{8^{-3}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{32}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 4^3\left(\frac{1}{64}\right)^2} =$$

c) $$\frac{125\left(\frac{1}{25}\right)^{-4} 625^3}{25^4\, 5^{-5}\left(\frac{1}{5}\right)} =$$

d) $$\frac{16^4\left(\frac{1}{8}\right)^3 \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{16}\right)^{-3} 32^4 \frac{1}{8}} =$$

e) $$\frac{36^3\, 12^{-3}\left(\frac{4}{27}\right)^5}{32\frac{1}{216}\left(\frac{1}{36}\right)^{-3}} =$$

f) $$\frac{\frac{1}{3}27^2\left(\frac{1}{81}\right)^4}{9^{-3}\left(\frac{1}{27}\right)^3\left(\frac{1}{9^2}\right)^{-3}} =$$

g) $$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)27^2\left(\frac{1}{81}\right)^4}{9^{-3}\left(\frac{1}{27}\right)^3\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}} =$$

Solucions: a) 3^3 b) 2^2 c) 5^{21} d) 2^{-23} e) $2^2 3^{-15}$ f) 3^{-8} g) 3^{-2}

- **Radicals**

$\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	Si el radicand és positiu i l'índex parell l'arrel té dos solucions
$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	Si el radicand és negatiu i l'índex parell l'arrel no és real
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	Si l'índex és imparell el radical sempre té un únic valor
$\sqrt[n\cdot q]{a^{m\cdot q}}=\sqrt[n]{a^m}$		

3. Escriviu en forma de potència els següents nombres:

a) $\dfrac{\left(6^6\cdot 9^{-5}\right)^3 27\sqrt[4]{18^3\cdot 2}}{\left(12\cdot 3^{-3}\right)^6\sqrt[4]{16^3\cdot 18}}$

b) $2\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}$

c) $2\sqrt[4]{\frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{32\sqrt[3]{16}}$

d) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}\sqrt[3]{4\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt[6]{8\sqrt{8}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

Solució:
a) $2^{\frac{15}{4}}\cdot 3^4$ b) $2^{\frac{47}{24}}$ c) $2^{\frac{77}{24}}$ d) $2^0=1$

4. Demostra que el nombre $x=\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ és enter.

Molta gent coneix el quadre *Exercici complicat* (any 1895) del pintor **Nikolai Bogdánov-Belsky** (1868-1945), però molt pocs se n'adonen de quin és l'exercici complicat quan miren el quadre. Es tracta de resoldre ràpida i mentalment la següent operació:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$$

Sabries trobar el truc per resoldre-ho ràpidament?

Anys més tard **Yakov Perelman** (1882-1942) va proposar el següent problema: és la sèrie 10,11, 12, 13, 14 la única sèrie de cinc nombres enters consecutius amb aquesta propietat?

5. Fes les següents operacions (fàcils) amb radicals:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}=$ b) $\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}=$

c) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}=$ d) $\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}=$

e) $\sqrt{\frac{3}{16}}-4\sqrt{12}=$ f) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{18}{75}}=$

g) $\sqrt{\frac{1}{2}}+3\sqrt{\frac{1}{8}}=$ h) $\sqrt{\frac{5}{12}}-\sqrt{\frac{10}{6}}=$

i) $6\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}=$ j) $9\sqrt{48}-\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75}=$

k) $\sqrt{45x^3}+\sqrt{5xy^2}-\sqrt{80x^3}$ l) $\left(3+4\sqrt{5}\right).\left(1-2\sqrt{5}\right)=$

m) $\left(3+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{3}\right)=$ n) $\left(5+3\sqrt{6}\right).\left(7-6\sqrt{6}\right)=$

o) $\left(4+3\sqrt{10}\right).\left(4-3\sqrt{10}\right)=$ p) $\left(2\sqrt{18}-3\right).\left(3\sqrt{18}-1\right)=$

q) $\left(1+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=$ r) $\sqrt[6]{x^5}.\sqrt[5]{x^3}.\sqrt[10]{x}=$

s) $\sqrt[6]{a^5b^7}:\sqrt[3]{ab^2}=$ t) $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[12]{64}}=$

u) $\sqrt[6]{125}:\sqrt[4]{25}=$

Solucions: a) $2\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{5}$ c) $6\sqrt{6}$ d) $-\sqrt[3]{2}$ e) $\frac{-31}{4}\sqrt{3}$ f) $\frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$ g) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ h) $\frac{-1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ i) $\frac{39}{4}\sqrt{2}$ j) $43\sqrt{3}$ k) $(-x+y)\sqrt{5x}$ l) $-37-2\sqrt{5}$ m) $3-\sqrt{3}$ n) $-73-9\sqrt{6}$ o) -74 p) $111-33\sqrt{2}$ q) $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-3$ r) $\sqrt[15]{x^{23}}$ s) $\sqrt{ab}$ t) 1 u) 1

La racionalització de denominadors consisteix en trobar una expressió equivalent però sense radicals en el denominador. Existeixen tres casos de racionalització:

- <u>1r cas</u>: en el denominador hi ha una arrel quadrada en forma de factor:

a) $\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Recordeu que: $\sqrt[n]{a^n}=a$

- <u>2n cas</u>: en el denominador hi ha un arrel no quadrada:

b) $\frac{1}{\sqrt[7]{a^4}}=\frac{1\cdot\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[7]{a^4}\cdot\sqrt[7]{a^3}}=\frac{\sqrt[7]{a^3}}{a}$

- <u>3r cas</u>: en el denominador hi ha una suma amb algun radical

c) $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}=\frac{2\sqrt{10}-5}{8-5}=\frac{2\sqrt{10}-5}{3}$

6. Racionalitza les següents expressions:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ b) $\dfrac{-5}{\sqrt{7}}$ c) $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ e) $3\sqrt{\dfrac{12}{20}}$

f) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ g) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ i) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ j) $\dfrac{5}{\sqrt{5}\left(1-\sqrt{2}\right)}$

Solucions:
a) $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$; b) $-\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$; c) $\dfrac{\sqrt{35}}{5}$; d) 2 ; e) $\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$; f) $1+\sqrt{3}$;
g) $\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}$; h) $-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; i) $4+\sqrt{15}$; j) $-\sqrt{5}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

7. I ara racionalitza aquestes una miiiiiica més difícils:

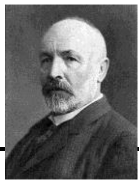
a) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$ b) $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$ c) $\dfrac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$

e) $\dfrac{5-2\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{125}{\sqrt[3]{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$ g) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt{x+1}}$ h) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$

Solucions:
a) $\sqrt{x^2-1}$; b) $\sqrt[5]{x^3}$; c) $\dfrac{7+\sqrt{10}}{3}$; d) $\dfrac{7+2\sqrt{21}}{21}$; e) $\dfrac{13+5\sqrt{2}}{7}$;
f) $25\sqrt[3]{5^2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$; g) $\sqrt[3]{x-1}\sqrt{x+1}$; h) $\dfrac{-3-\sqrt{15}}{2}$.

Compara els nombres $a=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}$ i $b=\sqrt{3}+\sqrt{20+10\sqrt{3}}$ ... què hi observes?

Podem generalitzar-ho amb una propietat: siguin *x*, *y* dos nombres reals i positius, comproveu que els dos nombres reals $a=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}$ i $b=\sqrt{x}+\sqrt{y+xy+2y\sqrt{x}}$ coincideixen.



8. Opereu i simplifiqueu les expressions següents:

a) $\dfrac{\left(2\sqrt{6}-3\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}-6\right)^2}{2\sqrt{144}-\sqrt{450}-\sqrt{100}-\sqrt{162}}$

b) $\dfrac{\sqrt{108}-\sqrt{18}-\sqrt{48}+\sqrt{32}}{\sqrt{256}-\sqrt{54}+\sqrt{96}-\sqrt{225}}$

c) $\left(2\sqrt{10}-3\sqrt{6}\right)^2+\left(4+3\sqrt{15}\right)^2-\left(\sqrt{8}+5\sqrt{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(8+\sqrt{48}\right)$

d) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}+2\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{15}+\sqrt{10}\right)$

e) $\dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2-\sqrt{12}}{\sqrt{147}+\sqrt{144}-\sqrt{243}-\sqrt{81}}$

f) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}}-1\right)$

h) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\sqrt{2}$

i) $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2-\left(6-\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{28}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$

$SOLUCIONS:(a)\dfrac{1}{2};\quad (b)\sqrt{2};\quad (c)151;\quad (d)1+\sqrt{5};\quad (e)1;\quad (f)0;\quad (g)1$
$(h)2;\quad (i)-4;$

9. Fes les següents operacions i simplifica el resultat si és possible (n'hi ha que són més fàcils del que semblen):

a) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$;

b) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}}$

c) $\sqrt{3a^2+\sqrt{6a^4-\sqrt{25a^8}}}$

d) $\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}}\right)^{32}$

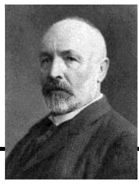
e) $\dfrac{x+4+4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

f) $\sqrt{\dfrac{ab^2+a^2b}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a^2b-ab^2}{a-b}}\qquad (a,b\in\mathbb{N})$

g) $\dfrac{\sqrt{3}-2}{5+2\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

h) $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)}{\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^3}}$

$SOLUCIONS:(a)2;\quad (b)30;\quad (c)2a;\quad (d)a^{16}b^8c^4d^2;\quad (e)2+\sqrt{x};\quad (f)0;$
$(g)\dfrac{-57+41\sqrt{3}}{78}\quad (h)\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{ab}$



- **Equacions de 1r grau, de 2n grau i biquadrades**

1) $\frac{3x-2}{6}-\frac{4x+1}{10}=-\frac{2}{15}-\frac{2(x-3)}{4}$ $\qquad x=3$

2) $(x+1)^2+(x-2)^2=(x+2)^2+(x-1)^2$ $\qquad x=0$

3) $4(x-3)-(x+3)-(2x+1)=3$ $\qquad x=19$

4) $\frac{x+2}{3}-\frac{x+1}{4}=1-\frac{x+7}{12}$ $\qquad x=0$

5) $3(2x+1)-5(x-7)=1+(x-1)-3(x+1)$ $\qquad x=\frac{-41}{3}$

6) $\frac{3(x-2)}{5}-\frac{6-5x}{15}=\frac{2(x+5)}{3}$ $\qquad x=\frac{37}{2}$

7) $4(x-3)(x+3)-(2x+1)^2=3$ $\qquad x=-10$

8) $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{1+x}{2}=\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{2+x}{4}$ $\qquad$ *infinites solucions*

9) $0,2x+0,6-0,25(x-1)^2=1,25x-(0,5x+2)^2$ $\qquad x=-3$

10) $(5x-3)^2-5x(4x-5)=5x(x-1)$ $\qquad$ *no te solució*

11) $\frac{2x+1}{7}-\frac{(x+1)(x-2)}{2}=\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{2}$ $\qquad x=\frac{29}{12}$

12) $\frac{x^2-1}{3}+(x-2)^2=\frac{x^2+2}{2}$ $\qquad$ *2n grau*: $x_1=4; x_2=\frac{4}{5}$

13) $0,5(x-1)^2-0,25(x+1)^2=4-x$ $\qquad$ *2n grau*: $x_1=5; x_2=-3$

14) $(0,5x-1)(0,5x+1)=(x+1)^2-9$ $\qquad$ *2n grau*: $x_1=2; x_2=-4,67$

15) $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}-2\right)^2-\frac{x+1}{8}=\frac{1}{8}-\frac{x-1}{4}$ $\qquad$ *2n grau*: $x_1=4; x_2=\frac{11}{3}$

16) $\frac{x(x-3)}{2}+\frac{x(x+2)}{4}=\frac{(3x-2)^2}{8}+1$ $\qquad$ *no te solució real*

17) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$ $\qquad x=\pm 2$

18) $\frac{x^2-2x+5}{2}-\frac{x^2+3x}{4}=\frac{x^2-4x+15}{6}$ $\qquad x=0\,;x=13$

19) $\frac{3x+1}{3}-\frac{5x^2+3}{2}=\frac{x^2-1}{2}-\frac{x+2}{3}$ $\qquad x=0\,;\,x=\frac{4}{9}$

20) $5x^2-7x+3=0$ $\qquad$ no te solució real

21) $x^2-6x+5=0$ $\qquad$ x=5, x=1

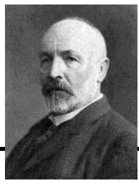
22) $5x^2-5=0$ $\qquad$ x=-1 x=1

23) $5x^2+7x=0$ $\qquad$ x=0 x= -7/5

24) $9x^2+6x+1=0$ $\qquad$ x=-1/3 (sol.doble)

25) $2x^2-6x=0$ $\qquad$ x=0 x=3

26) $7x^2+5=18$ $\qquad x=\pm\sqrt{\frac{13}{7}}$



27) $3x^2-2(x+5)=(x+3)^2-19$ x=0 x=4

28) $\dfrac{(x+2)^2}{5}-\dfrac{x^2-9}{4}=\dfrac{(x+3)^2}{2}+\dfrac{1}{5}$ x=-1 x=-3

29) $x^4-7x^2+6=0$ $x=\pm1$ $x=\pm\sqrt{6}$

30) $x^6-9x^3+8=0$ $x=2;\ x=1$

31) $x^4-5x^2+4=0$ $x=\pm2;\ x=\pm1$

32) $x^4+3x^2-4=0$ $x=\pm1$

33) $x^4-9x^2+8=0$ $x=\pm2\sqrt{2}$ $x=\pm1$

34) $x^4+3x^2+2=0$ *no te solució real*

35) $3+x^2(x^2-1)=3x^2(2x^2-1)$ x= +1 x=-1

36) $\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x^4-9}{9}=4-x^2$ $x=\pm\sqrt{3}$ $;x=\pm\sqrt{\dfrac{21}{2}}$

37) $(x^2-2)^2=1$ $x=\pm\sqrt{3}$ $;x=\pm1$

38) $\dfrac{3x^4-1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(x^4-2-\dfrac{1}{2}x^2\right)=\dfrac{x^2-5}{4}$ $x=0\,;$ $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

39) $(x^2-1)^2-4(x^2-1)+3=0$ $x=\pm2$ $x=\pm\sqrt{2}$

40) $-5-2x^2(x^2-2)=(x^2+2)(x^2-2)$ $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ $x=\pm1$

- **Equacions especials**

1) $(x-3)^2=4$ x=5 x=1

2) $(x+2)^3=-8$ x=-4

3) $(3x-2)^4=16$ x=0 x=4/3

4) $x^2(x-7)(4x-1)=0$ x=0(doble) x=7 x=1/4

5) $(5x-1)^3(x-7)(2x+4)=0$ x=1/5(triple) x=7 x=-2

6) $(3x+4)(-x+3)=0$ x=-4/3 x=3

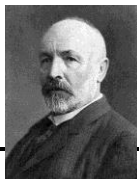
7) $x^3-3x^2+2x=0$ x=0 x=2 x=1

8) $x^4+2x^3+x^2=0$ x=0(doble) x=-1 (doble)

9) $x^5+4x^4+4x^3=0$ x=0 (tripe) x=-2 (doble)

10) $2x^3-x^2=0$ $x=0(doble)$ $x=\dfrac{1}{2}$

11) $(x+2)^3=-125$ $x=-7$



12) $\left(x+5\right)^2=1 \qquad x=-4; \quad x=-6$

13) $\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)^2=0 \qquad x=1(doble) \quad x=-2(doble)$

14) $\left(2x-3\right)\left(3x-2\right)=0 \qquad x=\frac{3}{2} \qquad x=\frac{2}{3}$

15) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2x}{3}+1\right)\left(3x-1\right)^2=0 \qquad x=\frac{1}{2} \quad ;x=\frac{-3}{2}; \quad x=\frac{-1}{3}(doble)$

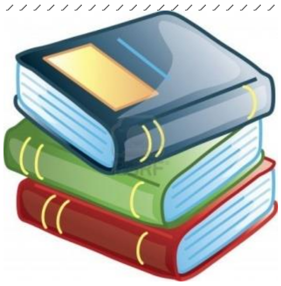
16) $\left(2x-1\right)\left(4-3x\right)\left(3x+1\right)\left(x-3\right)=0 \qquad x=\frac{1}{2}; x=\frac{4}{3}; x=\frac{-1}{3}; x=3$

17) $\left(x+2\right)^2=25 \qquad x=3; \quad x=-7$

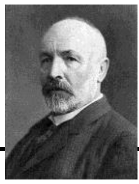
18) $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=4 \qquad x=\frac{-3}{2}; \quad x=\frac{5}{2}$

19) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \qquad x=3; \quad x=-2$

20) $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2=49 \qquad x=\frac{5}{2}; x=\frac{-13}{6}$



Els signes < i > foren introduïts pel matemàtic anglès **Thomas Harriot** (1560-1621). El signe = l'inventà l'anglès **Robert Recode** (1510-1558) justificant-ho "Posaré un parell de paral·leles de la mateixa longitud per designar l'expressió és igual a, així: =. No hi ha cosa que sigui més igual".
La primera persona que fa servir els signes + i – fou el comptable alemany **Johann Widman** en una aritmètica comercial de títol *"Rechenung auff allen Kauffmanschafft"* (1489), fins aleshores es feien servir les lletres p (*plus*) per la suma i m (*minus*) per la resta.
Els signes de multiplicar (X) i de dividir (:) foren introduïts per **William Oughtred** (1574-1660). L'any 1659 en el llibre *"Àlgebra alemanya"* **Jhoan Rahn** fa servir el signe ÷ per les divisions.
El primer que fa servir els parèntesis fou el francès **Albert Girard** (1595-1632) en el llibre *"Invention Nouvelle en Algebre"*. Aquest llibre és força important en la història de les matemàtiques perquè a més d'això explica el mètode de descomposició de polinomis, enuncia el teorema fonamental de l'àlgebra i utilitza per primer cop el símbol ------ per separar el numerador del denominador en una fracció.



- **Equacions irracionals**

1) $2+\sqrt{x+2}=5$ $\qquad x=7$

2) $\sqrt{x-7}=9$ $\qquad x=88$

3) $\sqrt{3x-2}-4=0$ $\qquad x=6$

4) $\sqrt{4x-5}=x+3$ $\qquad$ *no te solució*

5) $\sqrt{x^2+x-1}=2-x$ $\qquad x=1$

6) $2x+\sqrt{x+4}=2$ $\qquad x=0$

7) $x+1-\sqrt{5x-1}=0$ $\qquad x=2;\quad x=1$

8) $x-2\sqrt{x-1}=4$ $\qquad x=10$

9) $\sqrt{3x-5}+1=x-2$ $\qquad x=7$

10) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}=3$ $\qquad x=0$

11) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=7$ $\qquad x=9$

12) $\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{x^2-3}+2$ $\qquad x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3};\ x=\pm2$

13) $\sqrt{5x+6}=3+2x$ $\qquad x=\dfrac{-3}{4};\quad x=-1$

14) $x+\sqrt{7-3x}=1$ $\qquad x=-3$

15) $\sqrt{2-5x}+x\sqrt{3}=0$ $\qquad x=-2$

16) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-5}=0$ $\qquad$ (*no te solució*)

17) $\sqrt{2x}+\sqrt{5x-6}=4$ $\qquad x=2$

18) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ $\qquad x=3$

19) $\sqrt{\dfrac{7x+1}{4}}=\dfrac{5x-7}{6}$ $\qquad x=5$

20) $\sqrt{2x^2+x}=x-3$ $\qquad$ (*no te solució*)

21) $\sqrt{\dfrac{x+7}{x-2}}=\dfrac{1}{3}$ $\qquad x={}^{-65}\!/_{8}$

22) $\sqrt{\dfrac{x+7}{x-4}}=\dfrac{3}{4}$ $\qquad x={}^{-148}\!/_{7}$

23) $\sqrt{5x-7}-\sqrt{1-x}=0$ $\qquad x={}^{4}\!/_{3}$

24) $\sqrt{x^2-3x+6}-3(x-4)=1$ $\qquad x=5$

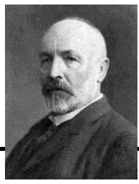
25) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=1$ $\qquad$ *no te solució*

26) $\sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1$ $\qquad x=1;\quad x=-3$

27) $\sqrt{x^2+x+3}=\sqrt{2x+5}$ $\qquad x=2;\quad x=-1$

28) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=1$ $\qquad x=6;\quad x=2$

29) $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-4}=0$ $\qquad x=5$



- **Sistemes d'equacions lineals i no lineals**

1. $\begin{cases} -6(y+1)-2y=8(x+2)-3(y+5) \\ x-3(y+2)=2(x+1) \end{cases}$ (1, -3)

2. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5}+\dfrac{2y+3}{7}=5 \\ \dfrac{8-3y}{2}-\dfrac{5x+1}{3}=-11 \end{cases}$ (7,2)

3. $\begin{cases} 5(y-1)-2(-3-2x)=3y+2x+1 \\ -3(y-2)=2(x-y)-3(x+y) \end{cases}$ (6,-6)

4. $\begin{cases} \dfrac{y+2}{3}+\dfrac{6-x}{2}=4 \\ \dfrac{y-4}{3}+\dfrac{x+2}{4}=1 \end{cases}$ (2,4)

5. $\begin{cases} \dfrac{3(x-y)}{4}=\dfrac{2+y}{4}-\dfrac{5x-y}{6} \\ 1+\dfrac{2y-7x}{12}=\dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x}{2} \end{cases}$ $\left(\dfrac{20}{19},1\right)$

6. $\begin{cases} \dfrac{3(y+2x+2)}{4}=\dfrac{4x+y-1}{3} \\ \dfrac{1}{3}(x+y)-\dfrac{1}{6}(x-y)=\dfrac{y-1}{6} \end{cases}$ (39,-20)

7. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x+y=5 \end{cases}$ (3,2) ; (2,3)

8. $\begin{cases} 2x^2-5y^2=13 \\ xy+3=0 \end{cases}$ (3,-1) ; (-3,1)

9. $\begin{cases} 2(x+y)^2-(2x+y)^2=-14 \\ x-y=5 \end{cases}$ (3,-2) ; (-13,-18)

10. $\begin{cases} x^2+y^2+6x-16=0 \\ y=1+2x \end{cases}$ (-3,-5) ; (1,3)

- **Inequacions de 1r grau**

1) $x+3<7$ $\qquad x<4$

2) $3x-18>x+2$ $\qquad x>10$

3) $-3x+5\geq x-3$ $\qquad x\leq 2$

4) $2x+7\leq 9-4x$ $\qquad x\leq \frac{1}{3}$

5) $5-7x<7-3x$ $\qquad x>\frac{-1}{2}$

6) $\frac{x-3}{2}>\frac{2x-5}{3}$ $\qquad x<1$

7) $\frac{x-3}{2}-\frac{2+x}{3}>3$ $\qquad x>31$

8) $\frac{4-2x}{5}+\frac{x-2}{2}\leq -6$ $\qquad x\leq -58$

9) $\frac{5}{6}(3-x)-\frac{1}{2}(x-4)\geq \frac{1}{3}(2x-3)-x$ $\qquad x\leq \frac{11}{2}$

10) $\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{3}\leq \frac{2}{15}(3x+2)+\frac{4(1-x)}{3}$ $\qquad x\leq 1$

11) $\frac{3-\frac{1}{3}x}{3+\frac{1}{2}}-x\geq \frac{3x-\frac{5}{2}}{1-\frac{2}{3}}$ $\qquad x\leq \frac{351}{424}$

12) $3(x-5)+7>2x-3$ $\qquad (5,+\infty)$

13) $2(3x-2)\leq 3(2x+1)$ $\qquad (-\infty,+\infty)$

14) $\frac{2x-3}{5}-\frac{1}{2}\leq \frac{x-1}{2}$ $\qquad [-6,+\infty)$

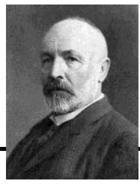
15) $2(3x-1)-5(x-2)<3(x-2)$ $\qquad (7,+\infty)$

16) $-(3x+2)-6<2x-9$ $\qquad \left(\frac{1}{5},+\infty\right)$

17) $\frac{x}{2}-\frac{2x-1}{4}\geq 1-\frac{x-3}{2}$ $\qquad \left[9/2,+\infty\right)$

18) $2x+1-\frac{x+3}{5}>x-\frac{2x-1}{10}$ $\qquad \left(\frac{-3}{10},+\infty\right)$

19) $2(x+3)>3(x+2)$ $\qquad (-\infty,0)$



- **Sistemes d'inequacions de 1r grau**

1) $\begin{cases} 4-3(x-1)>2x-3 \\ 3(x-1)+1\geq -5 \end{cases}$ $[-1,2)$

2) $\begin{cases} \dfrac{5-4x}{4}+\dfrac{9x-21}{2}\geq 2+\dfrac{10x-37}{4} \\ x-\dfrac{3x-2}{5}-\dfrac{x-1}{3}<3+\dfrac{4x-1}{15} \end{cases}$ $[2,+\infty)$

3) $\begin{cases} 4x+5<7 \\ 5-3x>2x-3 \end{cases}$ $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$

4) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{3}-\dfrac{x+1}{6}\leq 0 \\ \dfrac{4x+6}{5}\leq\dfrac{7x}{10}+\dfrac{x+7}{2} \end{cases}$ $\left[\dfrac{-23}{4},\dfrac{23}{3}\right]$

5) $\begin{cases} 3(x-1)+2\leq 2x-3(1-x) \\ 5x-2\geq -1 \end{cases}$ $[1,+\infty)$

6) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}\leq x+2 \\ \dfrac{x+1}{2}\geq\dfrac{x-2}{3} \end{cases}$ $[-7,+\infty)$

7) $\begin{cases} 2(x+1)-3\geq 3x-2(1+x) \\ \dfrac{3x-2}{3}\leq\dfrac{x-1}{2} \end{cases}$ $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$

8) $\begin{cases} \dfrac{3(2-x)}{2}-x<\dfrac{16}{5}-\dfrac{x+1}{5} \\ \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{x-5}{6}>3-\dfrac{2x-3}{18} \end{cases}$ $x>\dfrac{18}{5}$

9) $\begin{cases} (x-1)^2-(x+3)^2\leq 0 \\ x-3(x-1)\geq 3 \end{cases}$ $-1\leq x\leq 0$

10) $\begin{cases} 3x-\dfrac{x}{2}+5<0 \\ \dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x}{5}>0 \end{cases}$ *no te solució*

11) $\begin{cases} (x-1)^2+(x+2)^2>\dfrac{(2x-3)^2}{2} \\ (2x+1)^2-(x-3)^2<3(x+2)^2 \\ \dfrac{x-1}{3}+1>x \end{cases}$ $\dfrac{-1}{16}<x<1$