

**Unitat 0:**

**Coses de matemàtiques que  
fan falta per poder fer  
física amb unes mínimes  
condicions**

### 0.1 Derivada d'una funció

S'anomena funció derivada de  $f(t)$  al valor de l'expressió:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

|    | <b>Funció simple</b>    | <b>Derivada simple</b>                                                             | <b>Funció composta</b> | <b>Derivada composta</b>                                                                                        |
|----|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | $f(x) = k$              | $f'(x) = 0$                                                                        | $f(x) = k$             | $f'(x) = 0$                                                                                                     |
| 2  | $f(x) = kx$             | $f'(x) = k$                                                                        | $f(x) = ku$            | $f'(x) = ku'$                                                                                                   |
| 3  | $f(x) = x^n$            | $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$                                                          | $f(x) = u^n$           | $f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$                                                                              |
| 4  | $f(x) = \sqrt{x}$       | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$                                                      | $f(x) = \sqrt{u}$      | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$                                                                          |
| 5  | $f(x) = \sqrt[n]{x}$    | $f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$                                      | $f(x) = \sqrt[n]{u}$   | $f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$                                                          |
| 6  | $y = f(x) \pm g(x)$     | $y' = f'(x) \pm g'(x)$                                                             |                        |                                                                                                                 |
| 7  | $y = f(x) \cdot g(x)$   | $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$                                         |                        |                                                                                                                 |
| 8  | $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ | $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$                        |                        |                                                                                                                 |
| 9  | $f(x) = \ln x$          | $f'(x) = \frac{1}{x}$                                                              | $f(x) = \ln u$         | $f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$                                                                                  |
| 10 | $f(x) = \log_a x$       | $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$                                               | $f(x) = \log_a u$      | $f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' \cdot \log_a e$                                                                   |
| 11 | $f(x) = e^x$            | $f'(x) = e^x$                                                                      | $f(x) = e^u$           | $f'(x) = e^u \cdot u'$                                                                                          |
| 12 | $f(x) = a^x$            | $f'(x) = a^x \cdot \ln a$                                                          | $f(x) = a^u$           | $f'(x) = a^u \cdot u' \cdot \ln a$                                                                              |
| 13 | $f(x) = \sin x$         | $f'(x) = \cos x$                                                                   | $f(x) = \sin u$        | $f'(x) = u' \cdot \cos u$                                                                                       |
| 14 | $f(x) = \cos x$         | $f'(x) = -\sin x$                                                                  | $f(x) = \cos u$        | $f'(x) = -u' \cdot \sin u$                                                                                      |
| 15 | $f(x) = \tan x$         | $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ \sec^2 x \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$ | $f(x) = \tan u$        | $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \\ u' \cdot \sec^2 u \\ (1 + \tan^2 u) \cdot u' \end{cases}$ |

Troba la funció derivada de les funcions següents:

|                                                                          |                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1) $f(t) = 3t^2 - 6t + 5$                                                | 24) $f(t) = \frac{t^3}{2} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{t}{2}$         |
| 2) $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$                                          | 25) $f(t) = \sin \frac{3\pi}{2}$                                  |
| 3) $f(t) = 3t^2 - 2t + 5$                                                | 26) $x(t) = x_0 + v(t - t_0)$                                     |
| 4) $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 20$                                        | 27) $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$         |
| 5) $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$                                       | 28) $y(t) = y_0 + v_0 \sin \alpha t - 4,9t^2$                     |
| 6) $f(t) = \sqrt{2t} + \sqrt{5t}$                                        | 29) $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ |
| 7) $f(t) = \sin(t^2 - 5t + 7)$                                           | 30) $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$                         |
| 8) $f(t) = \sqrt{5t + 3}$                                                | 31) $f(t) = 4t^2$                                                 |
| 9) $f(t) = \cos(3t - \pi)$                                               | 32) $f(t) = 2t + 3t^2 - 1$                                        |
| 10) $f(t) = \sqrt{1 + 2t}$                                               | 33) $g(t) = t^6 - 2t + 3$                                         |
| 11) $f(t) = \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$                         | 34) $h(t) = t^4 + 2t + 15$                                        |
| 12) $f(t) = t^3 - 4t^2 + 1$                                              | 35) $f(t) = k \cdot t \cdot (t - 3)$                              |
| 13) $f(t) = (5t - 2)^3$                                                  | 36) $f(t) = (t^2 + 1) \cdot (t^2 - 1)$                            |
| 14) $f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$                                      | 37) $h(t) = (t^4 + 3) \cdot (t^3 - 2t)$                           |
| 15) $f(t) = (t^2 - 3)^3$                                                 | 38) $f(t) = t \cdot (t - 3) \cdot (t + 2)$                        |
| 16) $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$                                              | 39) $g(t) = (t + 1) \cdot (t^2 - 3) \cdot (t - 1)$                |
| 17) $f(t) = \sqrt{\sin t}$                                               |                                                                   |
| 18) $f(t) = \left(\frac{3t}{2} - 5\right)^4$                             | 40) $f(t) = \frac{1}{t} + 7t^{-2}$                                |
| 19) $f(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t^2 - 8t + 16$                             | 41) $g(z) = \sqrt{z^2 - 3}$                                       |
| 20) $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 6$                                             | 42) $M(l) = (l^2 - 3)^5$                                          |
| 21) $f(t) = \cos(2t + \pi)$                                              | 43) $f(t) = 4t^2 + \sqrt{t}$                                      |
| 22) $f(t) = \frac{t}{3} + \sqrt{2}$                                      | 44) $f(t) = \sin(2t)$                                             |
| 23) $f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ | 45) $f(t) = v_0 t - 5t^2$                                         |
|                                                                          | 46) $f(t) = \sin(t^2) + \sin^2 t$                                 |
|                                                                          | 47) $f(t) = \sqrt{7 - 6t^2}$                                      |

*Solucions a les derivades:*

|                                                                                                 |                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1) $f'(t) = 6t - 6$                                                                             | 24) $f'(t) = \frac{3t^2}{2} + 3t - \frac{1}{2}$  |
| 2) $f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$                                                                     | 25) $f'(t) = 0$                                  |
| 3) $f'(t) = 6t - 2$                                                                             | 26) $x'(t) = v$                                  |
| 4) $f'(t) = 3t^2 - 18t + 24$                                                                    | 27) $x'(t) = v_0 + a(t - t_0)$                   |
| 5) $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$                                     | 28) $y'(t) = v_0 \sin \alpha - 9,8t$             |
| 6) $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}} + \frac{5}{2\sqrt{5t}}$                                         | 29) $\varphi'(t) = \omega_0 + \alpha t$          |
| 7) $f'(t) = (2t - 5) \cos(t^2 - 5t + 7)$                                                        | 30) $y'(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ |
| 8) $f'(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t+3}}$                                                             | 31) $f'(t) = 8t$                                 |
| 9) $f'(t) = -3\sin(3t - \pi)$                                                                   | 32) $f'(t) = 2 + 6t$                             |
| 10) $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}}$                                                             | 33) $g'(t) = 6t^5 - 2$                           |
| 11) $f'(t) = 3\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$                                              | 34) $h'(t) = 4t^3 + 2$                           |
| 12) $f'(t) = 3t^2 - 8t$                                                                         | 35) $f'(t) = k \cdot (2t - 3)$                   |
| 13) $f'(t) = 15(5t - 2)^2$                                                                      | 36) $f'(t) = 4t^3$                               |
| 14) $f'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$                                                            | 37) $h'(t) = 7t^6 - 10t^4 + 9t^2 - 6$            |
| 15) $f'(t) = 6t(t^2 - 3)^2$                                                                     | 38) $f'(t) = 3t^2 - 2t - 6$                      |
| 16) $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$                                                            | 39) $g'(t) = 4t^3 - 8t$                          |
| 17) $f'(t) = \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}$                                                     | 40) $f'(t) = \frac{-1}{t^2} - \frac{14}{t^3}$    |
| 18) $f'(t) = 6\left(\frac{3t}{2} - 5\right)^3$                                                  | 41) $g'(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2-3}}$             |
| 19) $f'(t) = -t^2 + 6t - 8$                                                                     | 42) $M'(l) = 10l(l^2 - 3)^4$                     |
| 20) $f'(t) = 6t^2 + 6t$                                                                         | 43) $f'(t) = 8t + \frac{1}{2\sqrt{t}}$           |
| 21) $f'(t) = -2\sin(2t + \pi)$                                                                  | 44) $f'(t) = 2\cos(2t)$                          |
| 22) $f'(t) = \frac{1}{3}$                                                                       | 45) $f'(t) = v_0 - 10t$                          |
| 23) $f'(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ | 46) $f'(t) = 2t \cos(t^2) + 2\sin t \cos t$      |
|                                                                                                 | 47) $f'(t) = \frac{-6t}{\sqrt{7-6t^2}}$          |

## 0.2. Integrals

$F(t)$  és una primitiva de la funció  $f(t)$  si  $F'(t)=f(t)$ .

S'expressa  $\int f(t)dt = F(t) + c$  i s'anomena integral indefinida.

### Propietats de la integral indefinida:

$$\int (f(t) + g(t))dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt$$

$$\int k \cdot f(t)dt = k \cdot \int f(t)dt$$

Taula d'integrals immediates

$$\int k \cdot dt = kt + C$$

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C ; n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C$$

$$\int e^t dt = e^t + C$$

$$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C ; a \neq 1$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C$$

$$\int \cos t dt = \sin t + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\cot t + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t + C$$

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t + C$$

Usant la regla de la cadena podem ampliar la llista d'integrals immediates

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C ; n \neq -1 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C ; a \neq 1$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int (\sin f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int (\cos f(x)) \cdot f'(x) dx = \sin f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arcsin f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctg f(x) + C$$

Calcula les integrals següents:

|                                                                     |                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\int 7t^4 \, dt$                                                | 25) $\int \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \, dt$                                                     |
| 2) $\int \frac{1}{t^2} \, dt$                                       | 26) $\int \frac{2t}{7t^2-3} \, dt$                                                         |
| 3) $\int \sqrt{t} \, dt$                                            | 27) $\int \sqrt[3]{t} \sqrt[5]{t^2} \, dt$                                                 |
| 4) $\int (4t^2 - 5t + 7) \, dt$                                     | 28) $\int \left( \frac{-3}{t^4} - \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t^5} \right) \, dt$             |
| 5) $\int \frac{1}{2t+7} \, dt$                                      | 29) $\int \left( 2x^2 - 3x + 5 - \frac{1}{x} + \frac{15}{x^2} \right) \, dx$               |
| 6) $\int (t - \sin t) \, dt$                                        | 30) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} \, dx$                                                   |
| 7) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{t}} \, dt$                               | 31) $\int (a^x + e^x) \, dx$                                                               |
| 8) $\int (t-1)^3 \, dt$                                             | 32) $\int \left( \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{1+x^2} \right) \, dx$                   |
| 9) $\int (\sin t + e^t) \, dt$                                      | 33) $\int \left( 2\sqrt[3]{x^5} - 7 \cdot 8^x + \frac{4}{1+x^2} \right) \, dx$             |
| 10) $\int \sin(t-4) \, dt$                                          | 34) $\int \left( 4 \cdot \sin x + \frac{10}{1+x^2} - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) \, dx$ |
| 11) $\int (e^t + 3e^{-t}) \, dt$                                    | 35) $\int \frac{3x}{(x^2+5)^4} \, dx$                                                      |
| 12) $\int \frac{1}{t-1} \, dt$                                      | 36) $\int \frac{e^{2x} + 2x^3}{e^{2x} + x^4} \, dx$                                        |
| 13) $\int \frac{1}{t-4} \, dt$                                      | 37) $\int \frac{8x-2}{\sqrt{4x^2-2x}} \, dx$                                               |
| 14) $\int \frac{1}{(t-4)^2} \, dt$                                  | 38) $\int \frac{1}{\cos(2x) - \cos^2 x} \, dx$                                             |
| 15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$                           | 39) $\int \sin(4x-6) \, dx$                                                                |
| 16) $\int_1^6 (4t^3 - 4t^4 - 3) \, dt$                              | 40) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$                                                       |
| 17) $\int_{-1}^4 (t^2 + t - 3) \, dt$                               | 41) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$                                                         |
| 18) $\int \left( t^2 + \frac{1}{t^4} + \sqrt[3]{t} \right) \, dt$   | 42) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^4 \cdot \sqrt{1-x^2}} \, dx$                                |
| 19) $\int \left( \frac{1}{\sqrt[5]{t}} + \sqrt[3]{t} \right) \, dt$ | 43) $\int x^2 \cdot \sqrt{x^3-5} \, dx$                                                    |
| 20) $\int \left( \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) \, dt$       | 44) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$                                                           |
| 21) $\int (3t^3 - 2t^7) \, dt$                                      | 45) $\int \frac{e^{3x} + 5e^{2x} + e^x - 1}{e^x} \, dx$                                    |
| 22) $\int (t^4 - t^3 - 1) \, dt$                                    | 46) $\int x \cdot \sqrt{1-3x^2} \, dx$                                                     |
| 23) $\int \sin(5t) \, dt$                                           |                                                                                            |
| 24) $\int \frac{3}{5t^6} \, dt$                                     |                                                                                            |

*Solucions a les integrals:*

|                                                                    |                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 1) $F(t) = \frac{7t^5}{5} + c$                                     | 25) $\sqrt{t+1} + c$                                                   |
| 2) $F(t) = \frac{-1}{t} + c$                                       | 26) $\frac{1}{7} \ln 7t^2 - 3  + c$                                    |
| 3) $F(t) = \frac{2\sqrt{t^3}}{3} + c$                              | 27) $\frac{15\sqrt[15]{t^{22}}}{22} + c$                               |
| 4) $F(t) = \frac{4t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 7t + c$               | 28) $\frac{1}{t^5} + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2t^4} + c$              |
| 5) $F(t) = \frac{1}{2} \ln 2t+7  + c$                              | 29) $\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x - \ln x  - \frac{15}{x} + c$ |
| 6) $F(t) = \frac{t^2}{2} + \cos t + c$                             | 30) $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c$                                     |
| 7) $F(t) = \frac{5\sqrt[5]{t^4}}{4} + c$                           | 31) $\frac{a^x}{\ln a} + e^x + c$                                      |
| 8) $F(t) = \frac{(t-1)^4}{4} + c$                                  | 32) $7 \arcsin x + 4 \arctan x + c$                                    |
| 9) $F(t) = -\cos t + e^t + c$                                      | 33) $\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{4} - 7 \frac{8^x}{\ln 8} + 4 \arctan x + c$ |
| 10) $F(t) = -\cos(t-4) + c$                                        | 34) $-4 \cos x + 10 \arctan x - 4 \arcsin x + c$                       |
| 11) $F(t) = e^t - 3e^{-t} + c$                                     | 35) $\frac{-1}{2(x^2+5)^3} + c$                                        |
| 12) $F(t) = \ln t-1  + c$                                          | 36) $\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + x^4) + c$                                |
| 13) $F(t) = \ln t-4  + c$                                          | 37) $2\sqrt{4x^2 - 2x} + c$                                            |
| 14) $F(t) = \frac{-1}{(t-4)} + c$                                  | 38) $-\cot x + c$                                                      |
| 15) 1                                                              | 39) $\frac{-\cos(4x-6)}{4} + c$                                        |
| 16) -4940                                                          | 40) $\frac{(\ln x)^3}{3} + c$                                          |
| 17) 14,17                                                          | 41) $\ln \ln x  + c$                                                   |
| 18) $\frac{t^3}{3} - \frac{1}{t^3} + \frac{3\sqrt[3]{t^4}}{4} + c$ | 42) $\frac{-1}{3(\arcsin x)^3} + c$                                    |
| 19) $\frac{5\sqrt[5]{t^4}}{4} + \frac{3\sqrt[3]{t^4}}{4} + c$      | 43) $\frac{2\sqrt{(x^3-5)^3}}{9} + c$                                  |
| 20) $\frac{-1}{3t^3} + \frac{1}{t} + c$                            | 44) $\frac{\ln^2 x}{2} + c$                                            |
| 21) $\frac{3t^4}{4} - \frac{t^8}{4} + c$                           | 45) $\frac{e^{2x}}{2} + 5e^x + x + \frac{1}{e^x} + c$                  |
| 22) $\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} - t + c$                        | 46) $\frac{\sqrt{(1-3x^2)^3}}{9} + c$                                  |
| 23) $\frac{-\cos(5t)}{5} + c$                                      |                                                                        |
| 24) $\frac{-3}{25t^5} + c$                                         |                                                                        |

**Aplicacions de la integral**

La integral  $\int_a^b f(t) dt$  s'anomena integral definida entre  $a$  i  $b$ .

Regla de Barrow: Si  $F(t)$  és una primitiva de  $f(t)$  aleshores

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Si  $f(t)$  és una funció contínua  $\int_a^b f(t) dt$  ens dona el valor de l'àrea compresa entre la gràfica de  $f(t)$  i l'eix horitzontal.

Exercicis:

- 1) Trobeu l'àrea compresa entre:
  - a) la corba  $y = -x^2 + 9$  i la recta  $y = 0$
  - b) la corba  $y = x^2 - 4$  i la recta  $y = 0$(Sol: a)  $36 u^2$ ; b)  $32/3 u^2$ )
- 2) Trobeu l'àrea compresa entre la corba  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  i l'eix OX.  
(Sol:  $8 u^2$ )
- 3) Trobeu l'àrea compresa entre la corba  $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$  i l'eix OX.  
(Sol:  $131/4 u^2$ )
- 4) Trobeu l'àrea compresa entre la corba  $y = x^2 - 8x + 7$ , l'eix d'abscisses i les rectes  $x = 0$  i  $x = 8$ .  
(Sol:  $128/3 u^2$ )
- 5) Trobeu l'àrea compresa entre la corba  $y = x^3 - 4x$ , l'eix d'abscisses i les rectes  $x = -1$  i  $x = 3$ .  
(Sol:  $12 u^2$ )
- 6) Trobeu l'àrea del recinte limitat per  $y = \sin x$ , l'eix OX,  $x = 0$  i  $x = \frac{\pi}{2}$ .  
(Sol:  $1 u^2$ )
- 7) Calcula l'àrea que determina la corba  $y = x^2 + x - 2$  amb l'eix X entre les abscisses  $-1$  i  $4$ .  
(Sol:  $25,8 u^2$ )
- 8) Calcula l'àrea compresa entre la corba  $y = 3x^2 - x + 1$ , l'eix X i les rectes  $x = 0$  i  $x = 4$ .  
(Sol:  $60 u^2$ )
- 9) Calcula l'àrea entre la corba  $y = x^3 - 5x^2 + 6x$  i l'eix X.  
(Sol:  $37/12 u^2$ )
- 10) Busqueu l'àrea del tros de pla comprès entre la corba  $y = x^4 - x^2$  i la recta  $y = 0$ .  
(Sol:  $4/15 u^2$ )
- 11) Calculeu el valor de  $c$  ( $c > 0$ ) per tal que l'àrea limitada per la corba  $y = -x^3 + c^3$  i les rectes  $y = 0$ ,  $x = 0$  sigui igual a 3.  
(Sol:  $c = \sqrt[3]{2}$ )

### 0.3 Nocions de càlcul vectorial

#### Magnituds escalars i vectorials

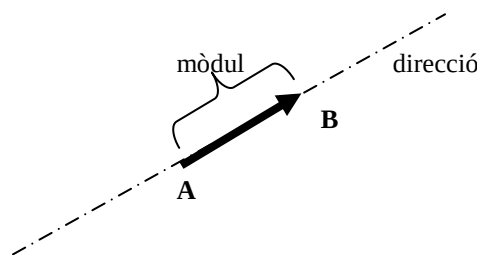
Les magnituds escalars queden perfectament identificades per un número. Això succeeix amb la distància en línia recta que hi ha entre 2 punts, el temps transcorregut entre 2 posicions diferents, ...

Les magnituds vectorials precisen d'una més gran precisió: són magnituds que per a estar determinades precisen, a més d'un valor numèric, una direcció, un sentit i un punt d'aplicació. Exemples de magnituds vectorials serien la velocitat, la posició, la força, ...

Per representar aquestes magnituds és necessari utilitzar un nou operador matemàtic: el vector.

#### Concepte de vector

Un vector es pot considerar com a un segment orientat, tal com es pot veure al dibuix.



Es defineix amb les següents propietats:

- Un origen o punt d'aplicació: A
- Un extrem: B
- Mòdul: Indicatiu de la longitud del segment AB.
- Una direcció: la de la recta en la que es recolza o qualsevol paral·lela.
- Sentit: indicat per la punta de la fletxa.

Habitualment un vector se simbolitza de la següent manera:  $\vec{v}$ , tot i que de vegades podem trobar-lo expressat com  $\mathbf{v}$ . El mòdul del vector se simbolitza amb  $|\vec{v}|$  o  $v$  (sense negreta).

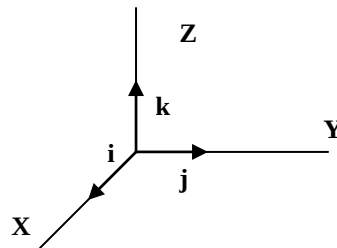


## Sistema de coordenades vectorials

Per a descriure analíticament un vector cal trobar un sistema de referència adient. Els sistemes de referències es poden dividir en tres grans grups, en funció de les relacions que s'estableixin entre els vectors que formen la base:

- Sistemes normals: si els vectors de la base són unitaris (mòdul 1).
- Sistemes ortogonals: si els vectors de la base són perpendiculars (ortogonals).
- Sistemes ortonormals: si els vectors són alhora perpendiculars i unitaris.

Nosaltres treballarem habitualment amb un sistema de referència ortonormal: el sistema de referència cartesià. Aquest sistema de referència consta de 3 eixos X, Y i Z a l'espai tridimensional, mentre que a l'espai bidimensional, el pla, només en consta de dos (X i Y, generalment) perpendiculars entre ells i amb vectors unitaris  $\mathbf{i}=(1,0,0)$ ,  $\mathbf{j}=(0,1,0)$ ,  $\mathbf{k}=(0,0,1)$ , respectivament.



D'aquesta manera qualsevol vector adopta l'expressió analítica:

$$\mathbf{V} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k}$$

Els valors  $v_x$ ,  $v_y$  i  $v_z$  són anomenats components del vector  $\mathbf{v}$  als eixos X, Y i Z respectivament, i aquesta expressió ens permet operar analíticament amb vectors.

## Operacions amb vectors

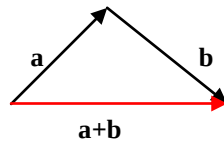
La primera qüestió que plantejarem amb els vectors és el tipus d'operacions que podem fer, com s'efectuen, quin tipus de resultat produeixen, ... Això ho farem de manera gràfica i analítica.

### • Suma de vectors lliures

#### Suma gràfica

La suma de dos vectors lliures és un altre vector lliure que es determina de la següent manera:

Se situa el punt d'aplicació d'un de ells a sobre de l'extrem de l'altre. El vector suma és el vector que porta com a origen l'origen del primer i com a extrem l'extrem del segon dels vectors que estiguem sumant.



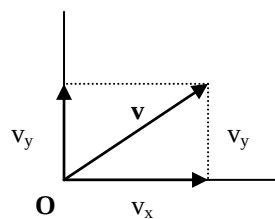
#### Suma analítica

La suma de dos vectors qualsevol  $\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}$  i  $\mathbf{b} = b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k}$  és el vector que té com a components la suma algebraica de les components dels vectors inicials.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \cdot \mathbf{i} + (a_y + b_y) \cdot \mathbf{j} + (a_z + b_z) \cdot \mathbf{k}$$

### • Mòdul d'un vector

Sigui un vector  $\mathbf{v}$  del pla XY. Aquest vector es pot escriure analíticament com:  $\mathbf{v} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} = (v_x, v_y)$ . Si suposem que coneixem el valor de  $v_x$  i  $v_y$ , com podríem conèixer el valor de la longitud de  $\mathbf{v}$ ? Si mirem el dibuix:



Es pot veure que es forma un triangle rectangle amb catets iguals a  $v_x$  i  $v_y$  i hipotenusa igual a  $\mathbf{v}$ . Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Per trobar el mòdul de la suma de dos vectors no és correcte sumar els seus mòduls sinó que cal fer servir una variació del teorema del cosinus:

$$|u + v| = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}$$

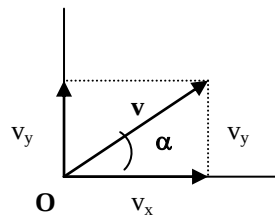
Hi ha formes i formes d'expressar els valors d'un vector. Algunes són correctes i d'altres tenen incorreccions. Tot seguit en veurem les principals errades que es cometien a aquest nivell de dificultat:

1.  $|\vec{F}| = 10 \text{ N}$  CORRECTE
2.  $\vec{F} = 10 \text{ N}$  INCORRECTE (Si  $\mathbf{F}$  és un vector el resultat ens ha d'aportar informació sobre la seva direcció i el seu sentit).
3.  $|\vec{F}| = -10 \text{ N}$  INCORRECTE (El mòdul d'un vector mai pot ser negatiu)

### • Descomposició de vectors

Sigui un vector  $\mathbf{v}$  del pla. Es pot escriure analíticament com:  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ . Si suposem que coneixem el valor de  $\mathbf{v}$  i l'angle que forma amb l'eix X o l'eix Y, com podríem conèixer el valor de les seves components  $v_x$  i  $v_y$ ?

Si mirem el dibuix



Aplicant nocions senzilles de trigonometria aplicades al triangle rectangle que es forma podríem dir:

$$v_x = v \cdot \cos \alpha$$

$$v_y = v \cdot \sin \alpha$$

### • Producte d'un escalar per un vector

El producte d'un escalar  $k$  per un vector  $\mathbf{v}$ , simbolitzat per  $k\mathbf{v}$  és un altre vector, amb les següents propietats:

- Mateixa direcció que  $\mathbf{v}$
- El mateix sentit que  $\mathbf{v}$  si  $k$  és positiu i el sentit contrari si  $k$  és negatiu
- El mòdul obtingut de fer el producte  $k\mathbf{v}$
- $k\mathbf{v} = k v_x \mathbf{i} + k v_y \mathbf{j} + k v_z \mathbf{k} = (k v_x, k v_y, k v_z)$

### • Producte escalar de 2 vectors

Estudiarem ara una nova operació entre vectors: el producte escalar. No es tracta d'una operació interna: el producte escalar de dos vectors no és un vector, sinó un escalar.

Siguin **a** i **b** dos vectors qualsevol, expressats analíticament en funció d'una base cartesiana.

$$\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\mathbf{b} = b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k} = (b_x, b_y, b_z)$$

El producte escalar es defineix com:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Una altra expressió del producte escalar, és la que ens el relaciona amb els mòduls dels vectors. Donats els vectors **a** i **b**, i conegut l'angle que formen entre ells  $\alpha$ , la definició que hem donat resulta equivalent a la següent:

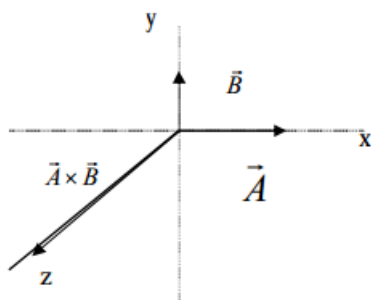
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$$

Recordeu que  $\cos 90=0$  i per tant, si dos vector són perpendiculars el seu producte escalar és nul.

Aquesta expressió és molt útil quan es desitja conèixer l'angle que formen 2 vectors, utilitzant aquesta expressió:

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

### • Producte vectorial de 2 vectors



El producte vectorial de dos vectors en una operació que forçosament s'ha de fer en l'espai tridimensional ja que el resultat ens dona un vector que és perpendicular als dos que multipliquem. Donats els vectors **a** i **b**, i conegut l'angle que formen entre ells  $\alpha$ , el mòdul del seu producte vectorial ve donat per:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$

Com ja hem dit, per fer productes vectorials necessitem treballar en 3 dimensions i, de moment, ni les pissarres ni els fulls de paper no estan preparats per poder-ho fer. Així que hem de definir un criteri per quan haguem de fer servir vectors perpendiculars al full o a la pissarra:

X: vector perpendicular al pla del paper cap a dins  
 O: vector perpendicular al pla del paper cap a fora

Abans hem comentat com es trobar el mòdul del vector resultat de fer el producte vectorial de dos vectors. Però podem trobar quin és aquest vector? I tant!

Siguin els vectors:

$$\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\mathbf{b} = b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k} = (b_x, b_y, b_z)$$

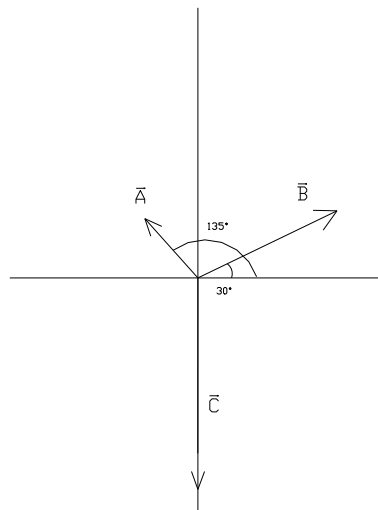
El vector resultat del producte vectorial ve donat per l'expressió:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \quad (\text{uf!})$$

**Activitats**

- Dibuixa, dins d'un sistema d'eixos, els següents vectors, indicant el quadrant al qual pertanyen:
  - $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
  - $-\mathbf{j}$
  - $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
  - $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$
- Siguin els vectors:  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ . Fes analíticament i gràficament les següents operacions:
  - $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
  - $2 \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b}$
  - $\mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{b}$
 (Sol: a)  $\mathbf{i}$ ; b)  $5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ; c)  $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ )
- Descompon els vectors següents en les seves components i expressa'ls analíticament
  - $\mathbf{a} = 4$  angle respecte a la horitzontal 1r quadrant =  $30^\circ$
  - $\mathbf{b} = 2$  angle respecte a la vertical 4t quadrant =  $60^\circ$
  - $\mathbf{c} = 1$  Semieix de divisió II i III quadrants.
  - $\mathbf{d} = 2$  angle respecte a la horitzontal 2n quadrant =  $45^\circ$
 (Sol:  $\mathbf{a} = 2\sqrt{3}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{b} = \sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ;  $\mathbf{c} = -\mathbf{i}$ ;  $\mathbf{d} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$ )
- Identifica l'angle que té amb l'horitzontal el vector  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$   
(Sol:  $288,43^\circ$ )
- Troba el valor de  $x$  per tal que el vector  $\bar{\mathbf{v}} = (-2, x)$ :
  - sigui perpendicular al vector  $(3, -4)$
  - formi un angle de  $180^\circ$  amb aquest mateix vector.
 (Sol: a)  $x = \frac{-2}{3}$ ; b)  $x = \frac{8}{3}$ )
- Identifica l'angle que té amb la vertical el vector  $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$   
(Sol:  $116,56^\circ$ )
- Calcula el producte escalar entre el vector  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  i  $\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ , i l'angle que formen entre ells.  
(Sol: 11;  $70^\circ$ )
- Quin angle  $\alpha$  formen els vectors  $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$  i  $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ? (Sol:  $75^\circ$ )
- Sumem un vector  $\vec{A}$  horitzontal (eix X) de mòdul 4 N amb un altre vector  $\vec{B}$  vertical (eix Y), de mòdul 3 N. Determina el mòdul del vector resultant i l'angle que forma aquest amb el vector  $\vec{A}$ . (Sol: 5 N,  $37^\circ$ )
- Siguin els vectors  $\vec{w} = (3, 4)$  i  $\vec{v} = (-4, 3)$ . Determina el seu producte escalar i l'angle que formen entre ells. (Sol: 0;  $90^\circ$ )
- Sigui  $\vec{B} = \hat{i} + m\hat{j} + 2\hat{k}$ . Determina el valor de  $m$  per tal que el mòdul de  $\vec{B}$  sigui 3. (Sol:  $m = \pm 2$ )

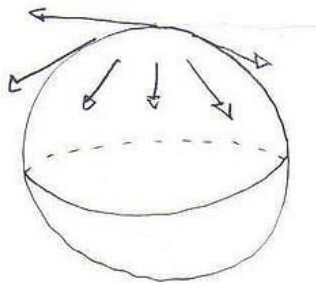
12. Determina el valor que han de tenir els paràmetres  $x$  i  $y$  per tal que el vector  $\vec{b} = (x, y, 1)$  sigui perpendicular als vectors  $(3, 2, 0)$  i  $(2, 1, -1)$ .  
(Sol:  $x=2$ ,  $y=-3$ )
13. Donats els vectors  $\vec{A} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$  i  $\vec{B} = -9\hat{i} + m\hat{j} + 6\hat{k}$ , determina el valor de  $m$  perquè:
- siguin perpendiculars. (Sol:  $m=39$ )
  - siguin paral·lels. (Sol:  $m=-3$ )
14. Siguin dos vectors  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  de mòduls respectius 4 N i 3 N, amb un angle entre els dos de  $53^\circ$ . Si el vector  $\vec{A}$  només té component  $x$ , determina:
- el vector suma dels dos. (Sol:  $5,81 \hat{i} + 2,40 \hat{j}$ )
  - el mòdul del vector suma (Sol: 6,28 N)
  - el producte escalar d' $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  (Sol: 7,22)
15. Identifica l'angle entre els vectors  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$  i  $\mathbf{b} = 12\mathbf{j} - \mathbf{i}$   
(Sol:  $121^\circ$ )
16. Donats els vectors  $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  i  $\vec{B} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + a\hat{k}$ , troba el valor de  $a$  per tal que els dos vectors siguin perpendiculars. (Sol:  $a=4$ )
17. Donats els vectors  $\vec{A} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$  i  $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - a\hat{k}$ , determina el valor de  $a$  perquè els vectors  $\vec{A} - \vec{B}$  i  $\vec{A} + \vec{B}$  siguin perpendiculars.
18. Troba analíticament el mòdul del vector resultant de la suma dels vectors representats a la figura, i l'angle que forma amb l'eix X, si  $|\vec{A}| = 10 \text{ N}$ ,  $|\vec{B}| = 20 \text{ N}$  i  $|\vec{C}| = 35 \text{ N}$



19. Donats els vectors  $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$  i  $\vec{B} = 7\hat{i} - 9\hat{j} - 6\hat{k}$ , troba el seu producte vectorial.

20. Donats els vectors  $\vec{A} = 7\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$  i  $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ , troba el seu producte vectorial.
21. Donats els vectors  $\vec{A} = 3\hat{j} + \hat{k}$  i  $\vec{B} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$ , troba el seu producte vectorial.
22. Donats els vectors  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$  i  $\vec{B} = 7\hat{i} - 9\hat{j} - 6\hat{k}$ , troba el seu producte vectorial.
23. Donats els vectors  $\vec{A} = 3\hat{i} - 8\hat{j} + \hat{k}$  i  $\vec{B} = -2\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ , calcula el producte vectorial  $\vec{R} = \vec{A} \times \vec{B}$  i el producte vectorial  $\vec{R} = \vec{B} \times \vec{A}$ .

### El teorema de la Bola Peluda



Dins de l'àlgebra vectorial existeix un teorema molt curiós anomenat Teorema de la Bola Peluda (Poincaré-Brouwer). Aquest teorema diu que: Sigui  $W : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un camp de vectors tangent. Aleshores  $W$  té almenys un zero, és a dir, existeix almenys un punt  $p_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $W(p_0) = 0$ . I què vol dir això a efectes pràctics?

Gràcies (o no) a aquest teorema fa que en pentinar-nos sempre ens quedi un remolí a la coroneta... un camp vectorial sobre una esfera no és orientable.

Però a part d'això, té aplicacions més serioses, per exemple en climatologia. El teorema de la bola peluda ens diu que en tot moment ha d'existir algun punt de la Terra on no hi fa vent (el vent tangent en aquell punt és zero). En sentit físic, aquest punt del vent zero serà l'ull d'un cicló o anticicló. És a dir, el teorema de la bola peluda ens assegura que ha d'haber en tot moment un cicló per algun lloc.