

ELS REGLETS DE NAPIER

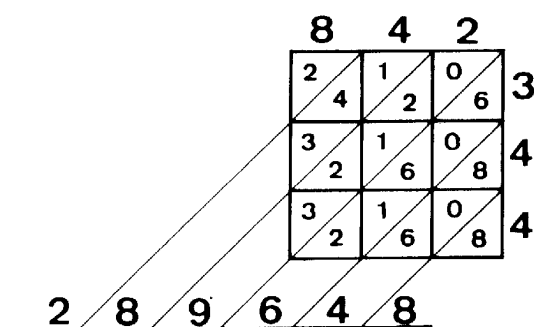
Introducció històrica.

El baró escocès John Napier (1550-1617) va ser un dels matemàtics més importants de la seva època i, especialment, un dels més preocupats per fer més fàcils els mètodes de càlcul. Va ser l'inventor dels logaritmes que tan útils van ser en el seu moment per resoldre multiplicacions i divisions i que van possibilitar l'aparició del regle de càlcul.

Al seu llibre "*Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo*" (1617) va proposar alguns mètodes de càlcul nous. Un d'ells van ser el que es coneix com Reglets de Napier, que serveix per facilitar la multiplicació i fa innecessària la memorització de les taules de multiplicar.

Fonamentació

Els reglets de Napier estan directament inspirats en l'algorisme hindú de la multiplicació.



Descripció

Els reglets de Napier són, senzillament, uns regles amb les taules de multiplicar escrites de manera que a cada quadret es posen les desenes a un costat de la diagonal i les unitats a l'altre. Hi ha també un reglet guia amb els nombres del 0 al 9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

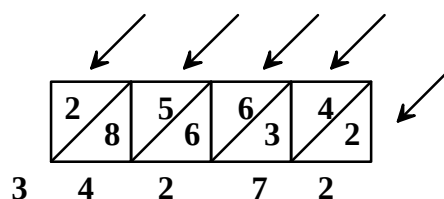
Funcionament

Amb els reglets de Napier només podem multiplicar per nombres d'una xifra. Si en volem fer una multiplicació per un de més haurem de fer servir el llapis i el paper i sumar convenientment els resultats parcials.

Exemple 1: Per multiplicar $4896 \cdot 7 = 34\ 272$

- S'agafa el reglet guia i, al costat, en posem les del 4, del 8, del 9 i del 6.
- Observem la fila del 7.
- Es va sumant des de la dreta diagonalment per esbrinar cadascuna de les xifres del resultat

1	4	8	9	6
2	8	1	1	1
3	2	2	2	1
4	6	3	3	2
5	0	4	4	3
6	4	8	5	3
7	8	6	6	4
8	2	6	7	4
9	6	7	8	5



Exemple 2: Per multiplicar $56 \cdot 791 = 44\ 296$

- Multipliquem primer per 5 amb els reglets: $5 \cdot 791 = 3\ 955$.
- Afegim un 0 al resultat i el tindrem multiplicat per 50. (39 550)
- Multipliquem per 6: $6 \cdot 791 = 4\ 746$.
- Sumem els resultats. $39\ 550 + 4\ 746 = 44\ 296$.

0	1	2	3	4
0 0	0 1	0 2	0 3	0 4
0 0	0 2	0 4	0 6	0 8
0 0	0 3	0 6	0 9	1 2
0 0	0 4	0 8	1 2	1 6
0 0	0 5	1 0	1 5	2 0
0 0	0 6	1 2	1 8	2 4
0 0	0 7	1 4	2 1	2 8
0 0	0 8	1 6	2 4	3 2
0 0	0 9	1 8	2 7	3 6

Guia
1
2
3
4
5
6
7
8
9

5	6	7	8	9
0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
1 0	1 2	1 4	1 6	1 8
1 5	1 8	2 1	2 4	2 7
2 0	2 4	2 8	3 2	3 6
2 5	3 0	3 5	4 0	4 5
3 0	3 6	4 2	4 8	5 4
3 5	4 2	4 9	5 6	6 3
4 0	4 8	5 6	6 4	7 2
4 5	5 4	6 3	7 2	8 1

L'ÀBAC DE NAPIER

Introducció històrica.

L'escocès John Napier (segle XVI) va ser un dels matemàtics més preocupats a trobar nous mètodes, cada vegada més fàcils, per realitzar les operacions aritmètiques. Gràcies al seu invent més important, els logaritmes, molts tècnics i científics es van poder evitar hores i hores de llargs i complicats càlculs. A més aquests van propiciar l'aparició d'un dels instruments de càlcul més utilitzats fins al segle XX: el regle de càlcul. Seves són també les regletes per multiplicar que porten el seu nom.

A la seva obra "*Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo*" (1617), en Napier encara va proposar, a més de les regletes, un nou estri de càlcul: un àbac que permetia resoldre les 5 operacions bàsiques sobre una mena de tauler d'escacs. Tot i així aquest àbac no va prosperar mai ja que exigia un certa perícia fent sumes mentalment. Una de les operacions que alleugeria clarament, però, era la multiplicació. Actualment ha quedat només com una curiositat històrica.

Fonamentació

L'àbac de Napier es basa, fonamentalment, en un sistema de notació binària, és a dir, en la descomposició dels nombres en sumes de potències de 2. Efectivament, qualsevol nombre es pot descompondre en una suma única d'aquestes potències. El tauler d'escacs té 8 caselles, per tant podem comptar amb aquestes potències: $2^0=1$; $2^1=2$; $2^2=4$; $2^3=8$; $2^4=16$; $2^5=32$; $2^6=64$ i $2^7=128$, i podrem calcular amb els nombres del 0 al 255. Per exemple, el nombre 47 serà igual a $32+8+4+2+1$ i el 141 serà $128+8+4+1$.

Representant cada nombre amb unes fitxes a les caselles corresponents, les sumes es redueixen a agrupar les fitxes dels sumands i, posteriorment, rectificar, per tal de facilitar la lectura del resultat. Les restes es podran fer traient fitxes del tauler o, tal i com es feia a altres àbacs, pel mètode de la *suma del complementari*, que

veurem més tard. Les multiplicacions es basen en dos aspectes: la propietat distributiva respecte a la suma i la suma d'exponents del producte de potències d'igual base.

Descripció

L'àbac de Napier consisteix, senzillament, en un tauler de 8x8 (ampliable a altres quadrats) i un joc de fitxes per anotar els nombres. Als marges inferior i dret del tauler hi trobem escrits els valors de les primeres potències de 2. Un nombre s'escriu descomponent-lo en una suma d'aquestes potències i marcant les caselles corresponents amb una fitxa. Observa a l'exemple com està escrit el nombre 185.

								128
								64
								32
								16
								8
								4
								2
●		●	●	●			●	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

$$185 = 128+32+16+8+1$$

Funcionament

Estudiarem 3 operacions: la suma, la resta i la multiplicació.

Suma

Example: Per sumar $89+41+52+14 = 196$

a) S'escriu cada sumand en una fila diferent, descomponent-lo en la seva suma binària corresponent ($89 = 64+16+8+1$; etc.). *Fig. 1*

b) Es baixen totes les fitxes, seguint la seva columna, fins a la fila inferior, on s'acumulen. És com un moviment de les torres dels escacs. *Fig. 2*

c) Com a norma general no pot haver-hi més d'una fitxa per casella. Per tant hem de fer una *rectificació*. El mètode és el següent: comencem per la dreta; si d'una casella en podem agafar dues fitxes, les retirem del tauler, afegint abans una fitxa més a la casella immediata de l'esquerra. Així, per exemple, en el cas que estudiem, si mirem la figura 2, observem que a la columna de l'1 hi ha dues fitxes, les traiem i n'afegim una a la del 2; ara en tenim dues a la del 2, les eliminem afegint una a la del 4, on queden 3 fitxes... Procedint així fins al final arribem a la situació de la *figura 3*, amb una fitxa, com a molt, a cada casella.

d) Llegim el resultat: $128+64+4 = 196$.

Fig.1

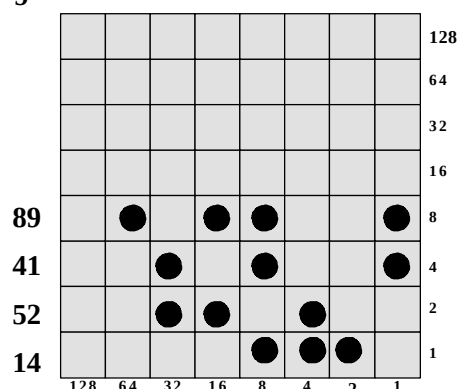


Fig.2

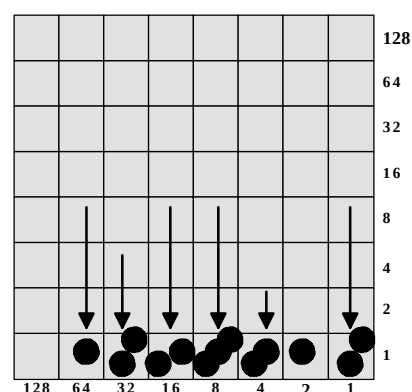
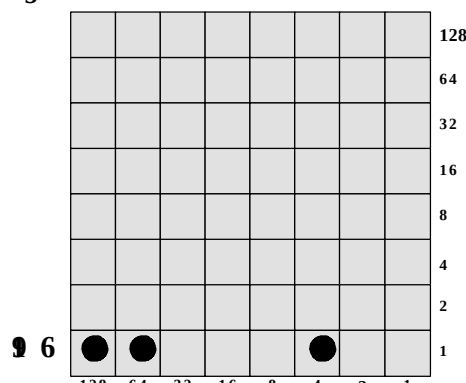


Fig.3



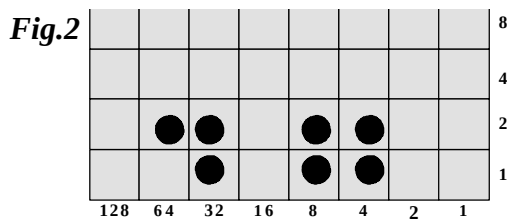
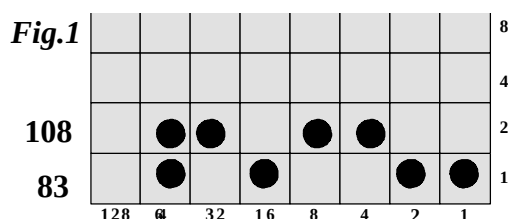
Resta

La resta es podria fer d'una manera similar a la suma però eliminant fitxes en comptes d'acumular-les. Tot i així la resta es pot fer d'una manera més fàcil (quan es domina) convertint-la en una suma de complementaris i fent un retoc final, tal i com es fa amb els àbacs tradicionals. En aquests una resta com $456 - 38$ es pot fer de la següent manera: primer sumem $456 + 961$ (on el 961 és el complementari a 9 de cada xifra del 038). La suma dona 1 417. Després se'n resten mil i se'n suma 1 (de fet en traiem 999). Queda com a resultat 418. A l'àbac de Napier tot aquest mètode és encara més senzill, ja que no complementem 9 (com a la base 10) sinó 1 (ja que fem servir la base binària 2).

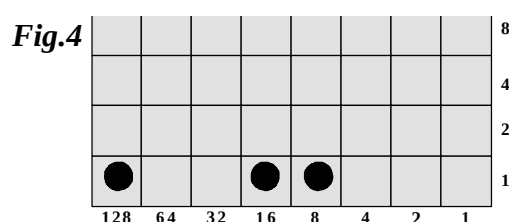
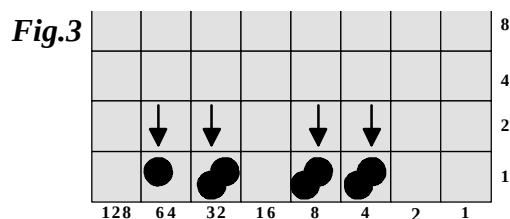
Exemple: Per restar $108 - 83 = 25$.

a) S'escriu cada nombre a una fila. *Fig. 1*

b) El subtrahend es complementa a 1 de la següent manera: mirem casella per casella des de la que hi hagi just a sota de la casella més a l'esquerra ocupada pel minuend (en aquest cas a la columna del 64). Si la casella és buida posem una fitxa i si és plena la traiem. *Fig. 2*

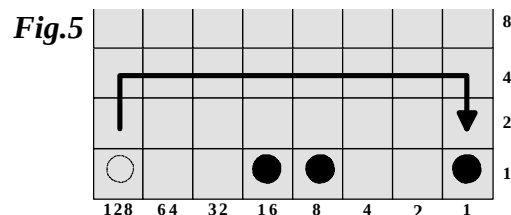


c) Es sumen els dos nombres i es rectifica. *Fig. 3 i 4*



d) S'agafa la fitxa que hi hagi més a l'esquerra i s'afegeix a la primera casella de la dreta, la de la columna de l'1. *Fig. 5*

e) Si cal es torna a rectificar (en aquest cas no cal) i es llegeix el resultat:
 $16+8+4=25$.



Resultat: $16+8+1=25$

Multiplicació

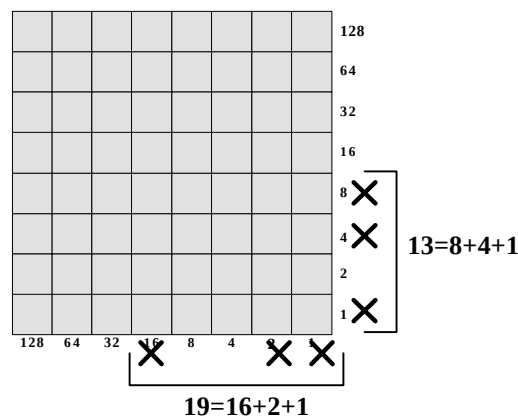
La multiplicació és una de les operacions que es simplifica més amb l'àbac de Napier, ja que, un cop escrits els nombres convenientment, el càlcul es redueix a un moviment en diagonal pel tauler semblant al moviment de l'alfil dels escacs.

Per multiplicar treballarem amb dos costats del tauler: l'inferior i el dret.

Exemple: Per multiplicar $19 \cdot 13 = 247$

a) Per preparar la multiplicació convé marcar prèviament cada factor (amb fitxes mateix) a un costat del tauler. Aquestes marques només ens serviran d'ajut, ja que no calcularem amb elles. Per exemple marquem el 19 a la part inferior i el 13 al costat dret. *Fig. 1*

Fig.1



b) Escrivim el 19 a cadascuna de les fileres que tenim marcades pel 13. Després es poden retirar les fitxes de marca. *Fig. 2*

Fig.2

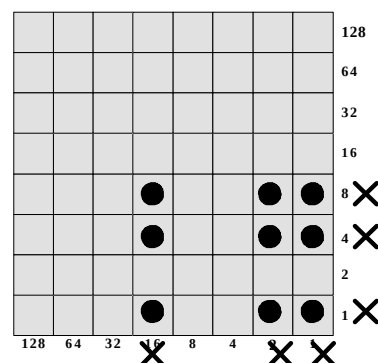


Fig.3

c) Es mouen totes les fitxes seguint un moviment en diagonal (cap a dalt i a la dreta) fins al costat dret del tauler. *Fig. 3*

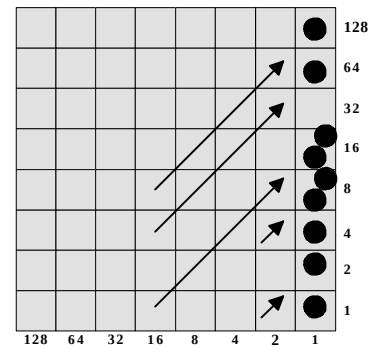
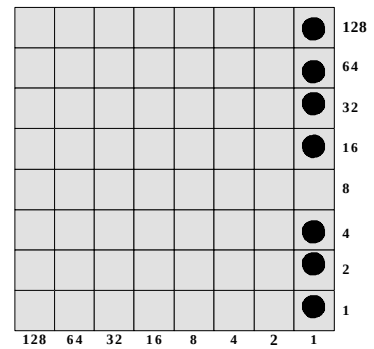


Fig.4

d) Es rectifica igual que fèiem amb la suma però de baix a dalt. *Fig. 4*

e) Es llegeix el resultat:
 $128+64+32+16+4+2+1 = 247$.



$$128+64+32+16+4+2+1 = 247$$

À
B
A
C

D
E

N
A
P
I
E
R

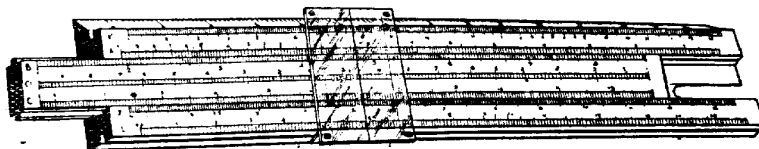
								128
								64
								32
								16
								8
								4
								2
								1
128	64	32	16	8	4	2	1	

EL REGLE DE CÀLCUL

Introducció històrica

El regle de càlcul va ser un dels estris de càlcul més utilitzats entre la desaparició dels àbacs i l'aparició de les calculadores electròniques. Fins i tot va "sobreviure" durant el temps de les calculadores mecàniques, ja que aquestes eren molt pesades i el regle hi cabia a una butxaca o una cartera de mà. El feien servir, fonamentalment els enginyers, químics, arquitectes, etc. Per tant era un estri força especialitzat. De fet ja veurem que no era massa fàcil utilitzar-los.

Sembla ser que el primer regle de càlcul el va fabricar William Oughtred, al 1653 aprofitant l'invent d'una nova operació matemàtica per part de John Napier uns anys abans: *els logaritmes*.



Fonamentació

El regle de càlcul es basa en transformar les multiplicacions en sumes de longituds, i les divisions en restes. Per poder-ho fer les escales dibuixades no corresponen a mesures (en cm, polzades, etc.) sinó a representacions de logaritmes (una de les dues operacions inverses de les potències). No entrarem ara, però, a estudiar aquest tema.

Els nombres i els resultats es busquen en aquestes escales que, com veuràs, tenen una graduació molt diversa i un tamany limitat. Això provoca dues coses diferents:

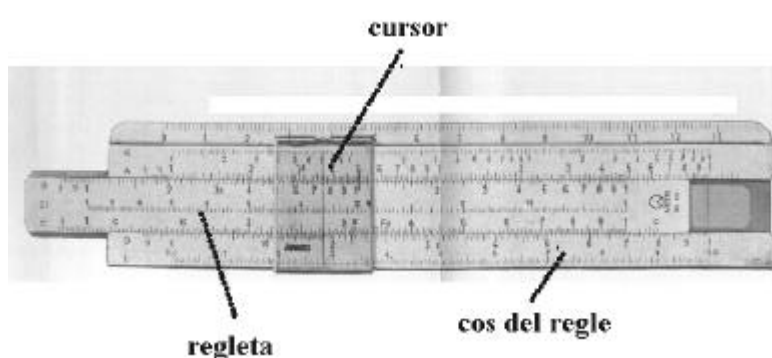
- per una banda s'ha de dominar el "moviment de les comes decimals" amb les multiplicacions i les divisions.
- els càlculs són sempre aproximats.

Pensa que per multiplicar $2\,568 \cdot 579$ es calculava, en realitat $2,57 \cdot 5,8$ i es rectificaven els resultats.

Descripció

El regle de càlcul té tres parts diferenciades:

- El **cos del regle** (és l'estructura que suporta les parts mòbils)
- El **reglet** (un regle mòbil encaixat al cos)
- El **cursor** (també mòbil; conté unes línies que faciliten la lectura dels resultats)



Tant al cos com al reglet hi ha diferents escales assenyalades amb unes lletres (A, B, C,...). Hauràs d'estar molt atent en llegir i marcar els nombres, ja que hi ha trossos marcats en centèssimes, en salts de cinc centèssimes, en salts de dècima, etc.

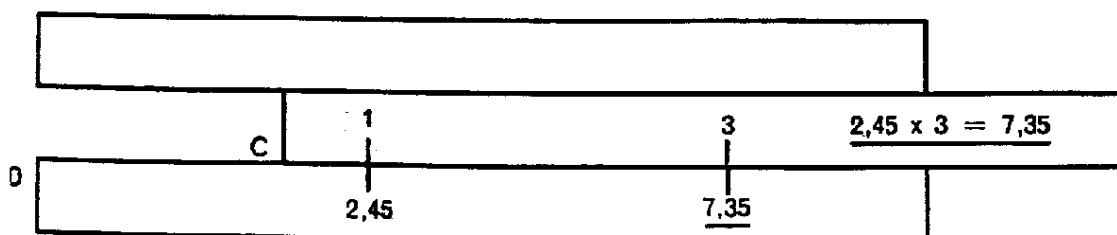
Funcionament

Amb el regle de càlcul no es poden fer ni sumes ni restes. En canvi ens ajuda a fer multiplicacions, divisions, potències, arrels i càlculs trigonomètrics. Nosaltres estudiarem només la multiplicació, la divisió i l'arrel quadrada. Per tant farem servir, exclusivament, les escales C (del reglet), A i D (del cos).. També ens limitarem a fer càlculs amb nombres decimals entre 1 i 10

Multiplicació

Exemple 1: Per multiplicar $2,45 \cdot 3 = 7,35$

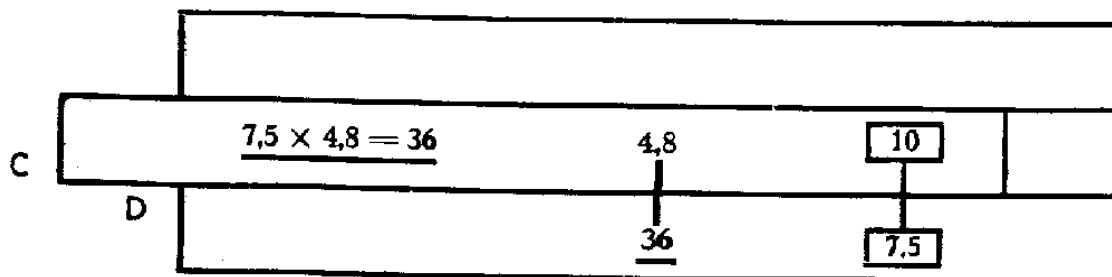
- a) Es fa coincidir l'1 de l'escala C del reglet amb el 2,45 de l'escala D del cos.
- b) Es fa córrer el cursor fins que la línia central més llarga coincideix amb el 3 de l'escala C del reglet.
- c) Es llegeix el resultat a l'escala D, just a sota del 3, i ajudant-nos amb la mateixa línia del cursor. Es llegeix 7,35



Exemple 2: Per multiplicar $7,5 \cdot 4,8$

Si ho intentes fer com abans veuràs que al fer coincidir el C-1 amb el D-7,5 no es podrà portar el cursor fins al C-4,8 perquè el reglet queda massa sortit i no es pot llegir el resultat. En un cas així es procedeix d'una altra manera:

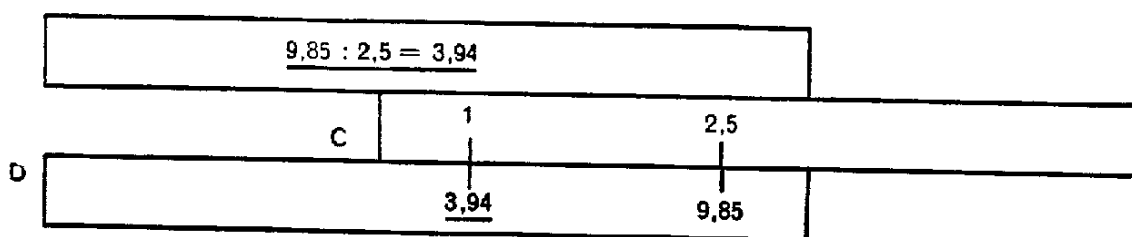
- a) Es fa coincidir el C-10 del reglet amb el primer factor (7,5) a l'escala D
- b) Es porta el cursor fins al segon factor (4,8) al mateix reglet C.
- c) Es llegeix el nombre de sota: 3,6.
- d) El resultat és aquest nombre multiplicat (mentalment) per 10: $3,6 \cdot 10 = 36$



Divisió

Exemple 1: Per dividir $9,85 : 2,5 = 3,94$

- a) Es fan coincidir, amb ajut del cursor, el dividend (D-9,85 al cos) amb el divisor (C-2,5 al reglet)
- b) Es transporta el cursor fins a C-1 del reglet.
- c) Es llegeix el resultat a sota (D-3,94).



Exemple 2: Per dividir $3,6 : 5 = 0,72$

el divisor, el reglet quedi massa sortit. En aquest cas i, com abans,

- a) Es fan coincidir el dividend (D-3,6) i el divisor (C-5) amb el cursor.
- b) Es transporta el cursor fins a C-10.
- c) Es llegeix el nombre de sota (D-7,2).
- d) Es divideix per 10 per saber el resultat: $7,2:10 = 0,72$

Arrel quadrada.

L'arrel quadrada és, dintre de tot, una de les operacions més fàcils de resoldre amb el regle de càlcul, si es saben interpretar les diferents escales, ja que, gràcies que hi ha unes escales de quadrats (A i B), el mètode es limita a llegir amb el mateix cursor l'arrel a les escales C o D.

Exemple 1: Per fer $\sqrt{2,75} \approx 1,66$

- a) Es posa el cursor en A-2,75.
- b) Es llegeix el resultat, amb l'ajut del cursor i sense moure'l, a l'escala D-1,66

Exemple 2: Per fer $\sqrt{6,2} \approx 2,49$

També es pot fer el mateix però amb les escales B i C

- a) Es posa el cursor a B-6,2.
- b) Es llegeix el resultat a sota, C-2,49.

