

«El joc de les 15» o «embolic»

La popular capseta amb 15 fitxes quadrades, numerades, té una història interessant, que pocs dels jugadors sospiten. La referirem amb les paraules del matemàtic alemany, investigador d'aquest joc, W. Arens.

«Fa prop de mig segle -a finals dels anys 70 del segle XIX- va aparèixer en els Estats Units el «joc de les 15»; es va propagar ràpidament i, a causa de la incalculable quantitat de jugadors assidus que va atraure, es va convertir en una veritable calamitat social.

El mateix va passar a aquest costat de l'oceà, a Europa. Aquí podien veure's les capsetes amb les 15 fitxes fins i tot en mans dels passatgers dels tramvies de cavalls. Els amos d'oficines i botigues, desesperats per l'afecció dels seus empleats a aquest joc, es van veure obligats a prohibir-lo durant les hores laborals. Els propietaris d'establiments de diversió aprofitaven aquesta mania per a organitzar grans concursos. Aquest joc va penetrar fins en les sales solemnes del reichstag alemany. «Com si fos ara veig en el reichstag a senyors honorables mirant atentament les capsetes quadrades que tenien en les seves mans» -recordo el conegut geògraf i matemàtic S. Günther, que era diputat durant els anys de l'epidèmia del joc.

A París aquest joc va trobar acollida a cel obert, en els bulevards, i aviat es va propagar de la capital a totes les províncies. «No hi havia ni una sola caseta de camp on no fes niu aquesta aranya, esperant una víctima propensa a caure en les seves xarxes» -escrivia un autor francès. L'any 1880 va arribar, pel que s'ha vist, la febre del joc al seu punt culminant. Però poc després d'això, el tirà era derrocat i vençut per les armes de les matemàtiques. La teoria matemàtica del joc va descobrir que dels nombrosíssims problemes que poden proposar-se, només tenen solució la meitat; l'altra meitat és impossible de resoldre, siguin quins siguin els procediments que es segueixin.

Va quedar clar per què alguns problemes no cedien ni als majors esforços i per què els organitzadors de concursos s'atrevien a oferir premis enormes a què els resolguessin. En aquest sentit va superar a tots i l'inventor del joc, que li va proposar a l'editor d'un periòdic de Nova York, per al suplement dominical, un problema irresoluble amb un premi de 1000 dòlars per la seva solució; i com l'editor es va quedar dubtant, l'inventor va dir que estava disposat a aportar la suma assenyalada de la seva pròpia butxaca. L'inventor va ser Samuel (Sam) Loyd, que, a més, es va fer molt conegut com a autor de problemes enginyosos i de multitud d'endevinalles. No obstant, és interessant el fet que no va poder patentar a Amèrica del Nord el joc que havia inventat. Segons les instruccions, per a obtenir la patent havia de presentar el «model pràctic» per a dur a terme la partida de prova; Loyd li va proposar a l'empleat de l'oficina de patents resoldre un problema, i quan aquest últim li va preguntar si tal problema tenia solució, l'inventor va haver de respondre: «No, això és impossible des del punt de vista matemàtic». «En aquest cas -va replicar l'empleat - no pot haver-hi model pràctic i, sense ell, no hi ha patent». Loyd es va conformar amb esta resolució, però, si hagués pogut preveure l'èxit sense precedents del seu invent, és probable que hagués estat més exigent».

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Col·locació normal de les fitxes

A continuació citarem l'exposició que fa el propi inventor del joc sobre algunes dades de la seva història:

«Els antics habitants del regne de l'enginy -escriu Loyd - recorden com a principis dels anys 1870 vaig fer jo que tot el món es trenqués el cap amb una capseta, que contenia fitxes mòbils i que va rebre el nom de «joc de les 15». L'ordre de les 15 fitxes en la capseta quadrada era correcte, però les fitxes 14 i 15 estaven transformades com mostra la il·lustració que s'adjunta.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

El problema consistia en, movent successivament les fitxes, posar-les en ordre, corregint la posició de les fitxes 14 i 15.

El premi de 1000 dòlars ofert per la primera solució correcta d'aquest problema no el va guanyar ningú, malgrat que es va intentar resoldre'l sense parar. S'explicaven gracioses històries de comerciants que s'oblidaven d'obrir les seves botigues i d'empleats honorables que es passaven tota la nit sota d'un fanal del carrer, buscant la solució. Ningú volia renunciar a la recerca de la solució, perquè tots estaven segurs que els esperava l'èxit. Es diu que els pilots, distrets amb el joc, s'encallaven els vaixells, els maquinistes s'oblidaven de parar el tren en les estacions, els grangers abandonaven les seves arades».

Ara donarem a conèixer el nostre lector els rudiments de la teoria d'aquest joc. En la seva forma general aquesta teoria és molt complicada i està íntimament relacionada amb una de les parts de l'àlgebra superior («teoria dels determinants»). Nosaltres ens limitarem només a certs raonaments exposats per V. Arens.

El problema del joc consisteix normalment en què, valent-se dels moviments successius que permet fer l'existència d'un camp lliure, cal fer que les 15 fitxes, col·locades al principi sigui com sigui, quedin ordenades segons els seus números, és a dir, en l'angle superior esquerre estarà la fitxa 1, a la seva dreta, la 2, després, la 3 i després, en l'angle superior dret, la 4; en la fila següent es trobaran, d'esquerra a dreta, les 5, 6, 7 i 8 i així successivament.

Aquesta ordenació normal definitiva s'ha donat a la primera imatge.

Imagini's ara que les 15 fitxes es troben en el més gran desordre. Mitjançant d'una sèrie de moviments sempre es pot traslladar la fitxa 1 al lloc que ocupa en la figura.

De la mateixa manera, sense tocar la fitxa 1, es pot fer que la fitxa 2 ocupi el lloc immediat de la dreta. Després, sense tocar les fitxes 1 i 2, es poden col·locar les 3 i 4 en els seus llocs normals; si casualment no es troben en les dues últimes columnes, és fàcil traslladar-les primerament a esta zona i després, fent una sèrie de translacions, aconseguir el resultat desitjat. Ara la fila superior 1, 2, 3, 4 ja està posada en ordre i en les següents manipulacions amb les fitxes no tocarem esta fila. Per aquest mateix procediment procurarem posar en ordre la segona fila: 5, 6, 7 i 8; és fàcil convèncer-se que això sempre es pot aconseguir. Després, a l'espai corresponent a les dos últimes files, cal posar en la posició normal les fitxes 9 i 13; això també s'aconsegueix sempre. Cap de les fitxes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, i 13, posades ja en ordre, tornen a moure's; queda un petit espai de sis camps, dels quals un està lliure i els altres cinc ocupats per les fitxes 10, 11, 12, 14 i 15 en ordre arbitrari. Dins dels límits d'aquest espai de sis llocs sempre poden posar-se en els seus llocs normals les fitxes 10, 11 i 12. Quan això s'ha aconseguit, les fitxes 14 i 15 resulten col·locades en l'última fila en ordre normal o en ordre invers. Per aquest procediment, que el lector pot comprovar en la pràctica, arribem al següent resultat. Sigui quina sigui la col·locació inicial de les fitxes, aquestes poden posar-se en l'ordre representat al començament, posició I, o en l'ordre que indicat després, posició II.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Posició I

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Posició II

Si una col·locació determinada, que anomenarem S per a simplificar, pot transformar-se en la posició I, és evident que també serà possible la transformació inversa, és a dir, la posició I en la posició S. Això s'explica perquè tots els passos de les fitxes són reversibles: si, per exemple, en l'esquema I podem col·locar la fitxa 12 en el camp lliure, aquest mateix pas podem donar-ho al revés fent el moviment contrari.

Tenim, doncs, dues sèries de col·locacions de tal manera, que de les posicions d'una d'elles es pot passar a la posició normal I i de les posicions de l'altra, a la posició II. I viceversa, de la col·locació normal es pot obtenir qualsevol de les posicions de la primera sèrie, i de la col·locació II, qualsevol posició de la segona sèrie. Finalment, si es tenen dues posicions qualssevol pertanyents a una mateixa sèrie, de l'una es pot passar a l'altra i viceversa.

I, continuant per aquest camí, no podrien unificar-se les posicions I i II? Pot demostrar-se d'una manera rigorosa (encara que no entrarem en detalls) que d'una d'aquestes dues posicions és impossible passar a l'altra, sigui quin sigui el nombre de passos que es donen. Per aquesta raó, el número enorme de posicions possibles de les fitxes es descompon en dos sèries independents: 1r, aquella de les posicions de la qual es pot passar a la posició

normal I, és a dir, la de les posicions resolubles; i 2a, aquella de les posicions de la qual pot passar-se a la posició II i de les que, per consegüent, de cap manera pot passar-se a la posició normal, és a dir, estes són les posicions per la resolució de les quals s'oferien premis enormes.

Com pot saber-se si una posició donada pertany a la primera sèrie o a la segona? Un exemple aclarirà això.

Considerem la col·locació representada a sota.

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

La primera fila de fitxes està en ordre, el mateix que la segona, a excepció de l'última fitxa (9). Aquesta fitxa ocupa el que en la posició normal pertany a la 8. La fitxa 9 està per tant, abans que la 8: aquest avançament de l'ordre normal s'anomena «desordre». Sobre la fitxa 9 diem: aquí hi ha un desordre. Si continuem observant les fitxes, descobrim un altre avançament en la fitxa 14, que està col·locada tres llocs abans (les fitxes 12, 13 i 11) de la seva posició normal: aquí hi ha tres desordres (la fitxa 14 està abans que la 12; la 14, davant de la 13; i la 14, abans que l'11). En total comptem ja $1 + 3 = 4$ desordres. Després, la fitxa 12 està col·locada abans que l'11 i el mateix passa amb la fitxa 13, que està abans que l'11. Això dóna dos desordres més. En total tenim sis desordres. D'una manera semblant s'estableix el nombre total de desordres que hi ha en cada col·locació, després de deixar lliure l'últim lloc en l'angle inferior dret. Si el nombre total de desordres és parell, com en el cas que hem examinat, de la col·locació donada pot passar-se a la posició final normal, en altres paraules, la col·locació pertanyerà a la sèrie de què poden resoldre's. Però si el nombre de desordres és senar, la col·locació donada pertanyerà a la segona sèrie, és a dir, a la de les impossibles de resoldre (el desordre nul es considera parell).

Gràcies a la claredat que van introduir en aquest joc les matemàtiques, ara és ja completament incomprensible l'apassionament febril i l'interès que va despertar en el seu temps. Les matemàtiques van crear una teoria exhaustiva d'aquest joc, una teoria que no deixa ni un sol punt dubtós. El resultat del joc depèn no de determinades casualitats ni de l'enginy, com en altres jocs, sinó de factors purament matemàtics, que els predeterminen amb absoluta fidelitat.