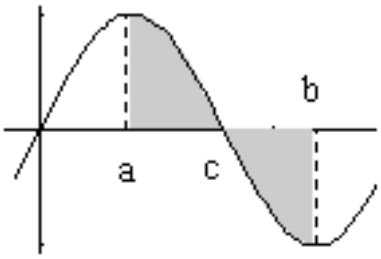
6.5.CÀLCUL D'ÀREES:

a) Àrea compresa entre l'eix d'abscisses i una corba.

Per a calcular l'àrea total entre l'eix d'abscisses i una corba, s'ha de tenir en compte que els trossos d'àrea per sota de l'eix d'abscisses són negatius. Així per a calcular l'àrea del dibuix:



$$àrea = \int_a^c f(x)\ dx - \int_c^b f(x)\ dx$$

El segon terme, que és negatiu, el posem amb signe negatiu per tal que no es contraresti amb el primer. Es pot posar també valor absolut a cada terme i sumar.

$$àrea = \left|\int_a^c f(x)\ dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\ dx\right|$$

En general, el recinte té zones per sobre i per sota de l'eix d'abscisses. Per calcular l'àrea de la funció seguirem els següents passos:

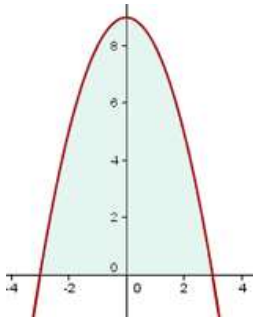
1. Es calculen els punts de tall amb amb l'eix OX, fent f(x) =0 i resolent l'equació.
2. Seleccionar les arrels que estiguin compreses entre a i b i s'ordenen de menor a major, que seran els límits d'integració.
3. Buscar una primitiva de f(x). Anomenem-la G(x).
4. L'àrea és igual a la suma de les integrals definides en valor absolut de cada interval.

$$àrea = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| + \ldots$$

En aquest cas, no cal dibuixar la corba.

Exemple 1.
Calcular l'àrea del recinte limitat per la corba $y=9-x^2$ i l'eix OX.
1. En primer lloc trobem els punts de tall amb l'eix OX per representar la corba i conèixer els límits d'integració.

$0 = 9 - x^2$ $\quad x = 3 \quad x = -3$



Com la paràbola es simètrica respecte al eix OY, el àrea serà igual al doble del àrea compresa entre x = 0 i x = 3.

$$A = \int_{-3}^{3}\left(9 - x^2\right) dx = 2\int_{0}^{3}\left(9 - x^2\right) dx = 2\left[9x - \frac{x^3}{3}\right] = 36u^2$$

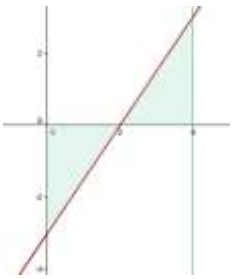
Exemple 2.Trobar l'àrea limitada per la recta $y = \frac{3x-6}{2}$, l'eix d'abscisses i les ordenades corresponents a x =0 i x =4.

1. Punt de tall amb l'eix d'abscisses és x= 2.

$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_0^2 = \frac{1}{2}(6-12) = -3$$

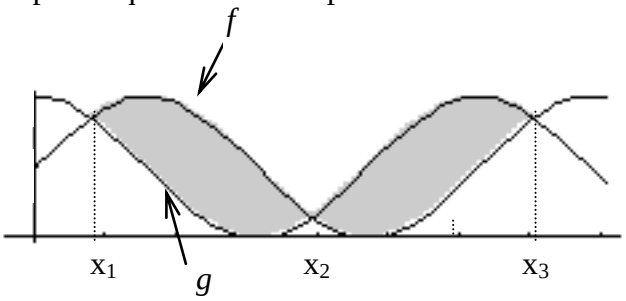
$$A_2 = \int_2^4 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left[(24-24)-(6-12)\right] = 3$$

$$A = |A_1| + A_2 = |-3| + 3 = 6u^2$$



b) Àrea compresa entre dues corbes:

2n Si es tallen en molts punts x_1, x_2, $x_{3,\ldots\ldots}$ aleshores posem valors absoluts per no haver-nos de preocupar de quina funció va per sobre en cada interval.



$$àrea = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\ dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))\ dx \right| + \ldots$$

Per calcular l'àrea entre les dues funcions seguirem els següents passos:

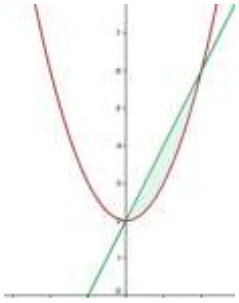
1. Es calculen els punts de tall entre les dues funcions, fent f(x) =g(x) i resolent l'equació.
2. Buscar una primitiva de f(x)-g(x).
3. L'àrea és igual a la suma de les integrals definides en valor absolut de cada interval.

$$àrea = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\ dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))\ dx \right| + \ldots$$

En aquest cas, tampoc cal dibuixar la corba.

Exemple 1.Calcular l'àrea del recinte limitat per la paràbola $y = x^2 + 2$ i la recta que passa pels punts (−1, 0) i (1, 4).

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y}{4} \qquad 4(x+1)=2y \qquad y=2x+2$$

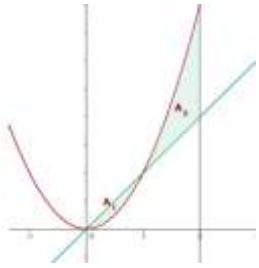


$$\begin{cases} y=x^2+2 \\ y=2x+2 \end{cases} \qquad x_1=0 \quad x_2=2$$

$$\int_0^2 \left(2x+2-x^2-2\right) dx = \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}u^2$$

Exemple 2.Trobar l' àrea de la figura limitada per: $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$
Punts de tall de la paràbola y la recta y = x.

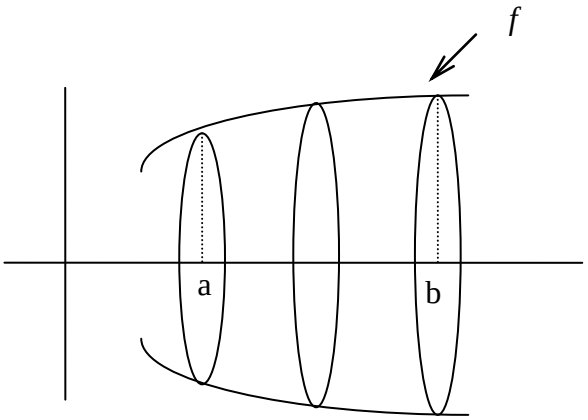
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases} \qquad x^2=x \qquad x=0 \quad x=1$$



$$àrea = \left|\int_0^1 (x^2-x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2-x)\,dx\right| = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_o^1 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_o^1 = \frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

6.6.<u>VOLUM DE REVOLUCIÓ</u> generat al fer girar f(x) on x ϵ[a,b] al voltant de l'eix d'abscisses la regió que queda per sota la gràfica de d'una funció *f*.

$$volum = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$



on a i b són els valors de l'eix d'abscisses que limiten el volum.

<u>EXEMPLES:</u> Calcula el volum engendrat en girar al voltant de l'eix x el recinte $f(x) = \sqrt{x-1}$ entre x= 1 i x= 5

$$volum = \pi \cdot \int_1^5 \left[\sqrt{x-1}\right]^2 dx = \pi \cdot \int_1^5 (x-1)\, dx = \pi . \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 = \pi\left[(25/2-5)-(1/2-1)\right] = 8\pi$$