

Consell de redacció

Jordi Comellas (coordinador general)
 Juanjo Cárdenas (coordinador temàtic)
 Àngel Alsina / Joan Aranès / Oriol Busquets,
 Marià Cano / Vicenç Font,
 Sílvia Margelí / Núria Planas

Edita



Ass. d'Ensenyants de Matemàtiques de les
 Comarques Gironines (ADEMGI)
 Ap. Correus 835 17080 GIRONA

Ass. de Professors de Matemàtiques de les
 Comarques Meridionals (APMCM)
 Ap. Correus 1306 43200 REUS

Ass. de Professors de Matemàtiques
 del Maresme (APaMMs)
 Av. Montevideo, 40 08340 VILASSAR DE MAR

Ass. de Barcelona per a l'Estudi
 i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM)
 Edifici Migdia Passeig de la Vall d'Hebron, 171
 08035 BARCELONA

Societat d'Ensenyants de Matemàtiques
 del Garraf (SEMG)
 Dpt. de Matemàtiques, EUPVG, UPC
 Avda. Víctor Balaguer s/n
 08080 Vilanova i la Geltrú

Impressió: Grup Artyplan- Artymprès, S. L.

Revista BIAIX
 ADEMGI, Ap. Correus 835
 17080 GIRONA
 e-mail: biaix@elistas.net
www.ice.urv.es/apmcm/biaix.html

Tirada: 850 exemplars
 Periodicitat: semestral
 Preu exemplar: 4,5 Euros.
 Dipòsit legal: T-0317-92 ISBN: 84-7827-246-1

SUMARI

Editorial

Matemàtiques i cultura3

A fons

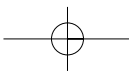
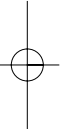
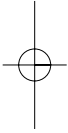
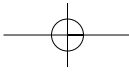
Aplicacions de les transformacions
 de funcions al batxillerat.
 El cas dels mosaics4
 La travessa com a joc d'atzar11
 Treballem matemàtiques amb
 els contes populars20
 Les matemàtiques des d'una
 perspectiva cultural:
 Etnomatemàtiques26
 Treball de matemàtiques en
 una aula amb diversitat cultural35
 Recull bibliogràfic36

A més

Sobre els "Principis i Standards
 per a les Matemàtiques Escolars"46
 Piràmides53

Seccions

Per pensar d'un minut a una hora60
 Webs matemàtiques62
 Materials71
 Cròniques70
 Agenda72
 Recensions74
 Llicències d'estudi77
 Salutació de la nova junta
 de FEEMCAT79
 Normes per a la presentació
 de contribucions80



Matemàtiques i cultura

Una de les finalitats de l'educació és formar ciutadans cultes, però el concepte de cultura és canviant i s'amplia cada cop més en la societat moderna. Per una banda, cada vegada més es reconeix el paper cultural de les matemàtiques i, d'altra banda, l'educació matemàtica té com a finalitat proporcionar eines que facilitin al ciutadà la seva incorporació a la cultura de la societat on viu. El que es preten és proporcionar als alumnes: 1) Capacitat per a interpretar i avaluar críticament la informació matemàtica que les persones poden trobar en diversos contextos, inclosos els mitjans de comunicació, o en el seu treball professional. 2) Capacitat per a crear i comunicar la informació matemàtica necessària per a resoldre els problemes que trobi, tant en la vida diària com en el treball professional.

En aquest monogràfic sobre MATEMÀTIQUES I CULTURA que teniu a les mans, hi podeu trobar un primer grup format per dos articles que utilitzen eines matemàtiques per analitzar situacions pròpies de la nostra cultura. L'article de V. Font utilitza les funcions per a l'estudi de la decoració amb mosaics, mentre que l'article de J. L. Cañadilla utilitza la simulació amb full de càlcul per estudiar un joc d'atzar tan important en la cultura actual com són les traveses.

En el tercer article, T. Colomer i N. Ramos fan una proposta per utilitzar els contes, un dels principals components de la cultura popular, per a treballar les matemàtiques al parvulari.

D'altra banda, quan es reflexiona sobre la relació entre cultura i matemàtiques ens hem de formular la pregunta següent: les diferents cul-

tures construeixen matemàtiques diferents? Hi ha antropòlegs que consideren que hi ha algunes activitats socials essencials (comptar, localitzar, mesurar, dissenyar, jugar i explicar) que són el fonament del desenvolupament de les matemàtiques pròpies de cada cultura. És ben cert que totes les cultures han desenvolupat necessàriament les seves matemàtiques pròpies com a resposta a les demandes de l'entorn, però també és cert que de la interacció i els conflictes entre cultures ha sorgit una disciplina internacional, que són les "Matemàtiques" que coneixem avui dia, que pot entrar en conflicte amb les matemàtiques pròpies de cada cultura. Aquest punt de vista antropològic ha mostrat interès en la investigació dels problemes que tenen les persones que aprenen matemàtiques en situacions de conflicte cultural, és a dir, allà on la cultura pròpia difereix marcadament de la cultura de l'escola. Per exemple, poblacions indígenes que es troben en una situació minoritària o bé, com és el cas del nostre país, en immigrants recents en societats occidentals europees. Els dos últims articles d'aquest monogràfic, l'article de M. Albertí i el d'A. Dolcet i J. Cárdenas, reflexionen sobre aquesta problemàtica.

A la secció A més hi trobareu un article de M. Civil i V. Horak que fa un breu repàs als "Principis i Standards per a les Matemàtiques Escolars" desenvolupats l'any 2000 pel National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) També hi trobareu l'article de H. Forrellad sobre les representacions planes del cossos tridimensionals, que ja va ser publicat en el n.19, però que per un error de maquetació va ser publicat sense les figures.

Aplicacions de les transformacions de funcions al batxillerat. El cas dels mosaics

Vicenç Font

Departament de Didàctica de les CCEE i de la Matemàtica de la UB. vfont@d5.ub.es

1. Introducció

Janvier (1987) en els seus treballs sobre el concepte de funció considera que les representacions associades al concepte de funció es poden classificar en quatre classes (expressió analítica, taula, gràfic i expressió verbal) que, idealment, contenen la mateixa informació, però que cada una d'elles posa en funció diferents processos cognitius, cada un d'ells estretament relacionat amb els altres. La representació gràfica connecta amb les potencialitats conceptualitzadores de la visualització i es relaciona amb la geometria i la topologia. La representació en forma de taula posa de manifest els aspectes numèrics i quantitatius. L'expressió analítica connecta amb la capacitat simbòlica i es relaciona principalment amb l'àlgebra mentre que la repre-

sentació verbal es relaciona amb la capacitat lingüística de les persones i és bàsica per interpretar i relacionar les altres tres. Les idees de Janvier, gràcies al seu poder explicatiu i relacional, han donat peu a moltes investigacions posteriors sobre la didàctica de les funcions i s'han concretat en materials que han canviat la manera de treballar les funcions a les aules.

Janvier considera que l'aprenentatge de les funcions no s'ha de limitar al d'una sola d'aquestes formes de representació, sinó que ha d'incloure la capacitat de traduir la informació d'una representació a l'altra. Les possibilitats de recodificar la informació d'una representació amb una altra queden recollides en la taula següent, que és una adaptació de la que proposa Janvier:

de ^a	Descripció verbal	Taula	Gràfica	Expressió analítica
Descripció verbal	Diferents descripcions	Estimació/càlcul de la taula	Croquis/esbós	Model
Taula	Lectura de les relacions numèriques	Modificacions de la taula	Traçat de la gràfica	Obtenció de l'expressió (ajust numèric)
Gràfica	Interpretació de la gràfica	Lectura de la gràfica	Canvis d'escala, d'unitats, etc.	Obtenció de l'expressió (ajust gràfic)
Expressió analítica	Interpretació de la fórmula (interpretació de paràmetres)	Càlcul de la taula donant valors	Representació gràfica	Transformacions de la fórmula

Aquesta taula contempla les possibles traduccions d'una forma de representació a l'altra, així com les traduccions dins de la mateixa forma de representació, que són les activitats de la diagonal. Aquestes últimes no estan contemplades en la taula original de Janvier. Aquesta taula també posa de manifest la multiplicitat de relacions que es poden establir entre les diferents formes de representar una funció. El pas de l'una a l'altra pot ampliar i reorganitzar la informació que està implícita en una de les formes de representació.

A la casella "Transformacions de la fórmula" hi tenen cabuda totes les transformacions de la fórmula de la funció que porten a una nova expressió equivalent a l'expressió simbòlica inicial de la funció. En concret hi tenen cabuda totes les expressions que porten a entendre una funció $f(x)$ com el resultat d'aplicar transformacions (translació, contracció, dilatació o reflexió) a una altra funció $g(x)$.

A continuació segueixen exemples de dos tipus d'activitats on la interpretació de l'expressió simbòlica d'una funció com el resultat de l'aplicació de les transformacions de funcions a una altra funció més simple resulta útil.

2. Transformacions de funcions i representació gràfica

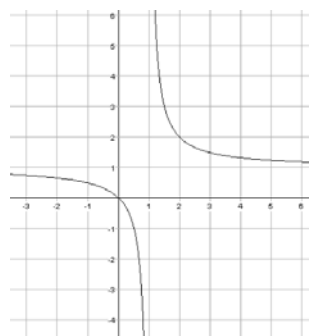
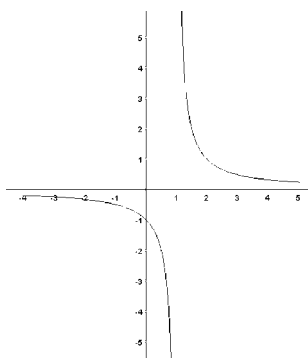
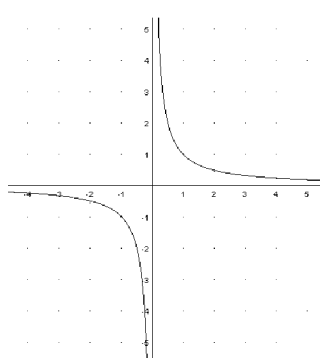
Les tècniques que es treballen al batxillerat per a representar funcions són: 1) Fer una

taula de valors 2) Utilitzar una calculadora gràfica o bé algun graficador de funcions 3) Quan una funció $f(x)$ és el resultat d'aplicar alguna transformació (translació, contracció, dilatació o reflexió) a una altra funció $g(x)$ de gràfica coneguda, dibuixar la gràfica de $f(x)$ a partir de la gràfica de $g(x)$ i 4) Representar la funció a partir de buscar el domini, punts de tall amb els eixos, asímptotes i comportament a l'infinit, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims, etc. El segon procediment es basa en el primer ja que els ordinadors representen les gràfiques de les funcions a base de calcular molts punts de la gràfica i d'unir-los mitjançant segments de recta.

El tercer procediment es basa en el fet de poder realitzar canvis en l'expressió simbòlica d'una funció, de manera que com a resultat d'aquests canvis la gràfica de la funció es pugui considerar com el resultat de fer certes transformacions a la gràfica d'una altra funció més fàcil de representar. Aquest procediment sovint s'aplica per a representar paràboles, però es pot aplicar per a representar d'altres tipus de funcions com, per exemple, algunes funcions racionals. Per exemple, si volem representar la funció

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

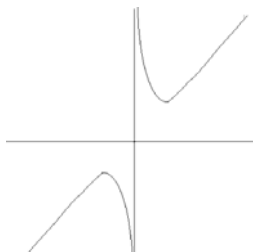
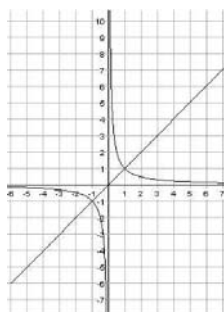
en $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ per poder interpretar la seva gràfica com el resultat de traslladar la funció $g(x) = \frac{1}{x}$ una unitat cap a la dreta i una unitat cap amunt:



Aquesta tècnica es pot ampliar considerant, a més de les transformacions de les funcions, les operacions entre funcions. Per exemple, si volem representar la funció $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ només cal transformar-la en suma de dues funcions de gràfica coneguda $f(x) = x + \frac{1}{x}$ cada una de les quals es molt fàcil de representar. Si dibuixem superposades les gràfiques de la funció de proporcionalitat $g(x) = x$ i de la funció de proporcionalitat inversa $h(x) = \frac{1}{x}$, tenim

les dues gràfiques de l'esquerra. Després n'hi ha prou de considerar el "pes" de cada una d'aquestes dues funcions en l'expressió de $f(x)$ per fer un esbós de la seva gràfica (dreta):

- Per a valors $x < -1$, $g(x) + h(x) \cong g(x)$ (la gràfica és quasi igual que la de la recta).
- Per a $x = -1$, $g(x) + h(x) = -2$.
- Per a valors $-1 < x < 0$, $g(x) + h(x) \cong h(x)$ (la gràfica és quasi igual que la de la hipèrbola).
- Per a valors $0 < x < 1$, $g(x) + h(x) \cong h(x)$ (la gràfica és quasi igual que la de la hipèrbola).
- Per a $x = 1$, $g(x) + h(x) = 2$
- Per a valors $x > 1$, $g(x) + h(x) \cong g(x)$ (la gràfica és quasi igual que la de la recta).

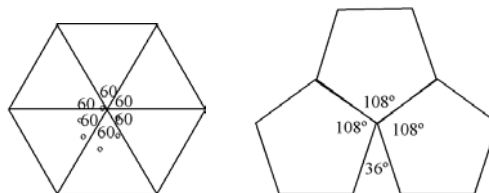


3. Mosaics i transformacions de funcions

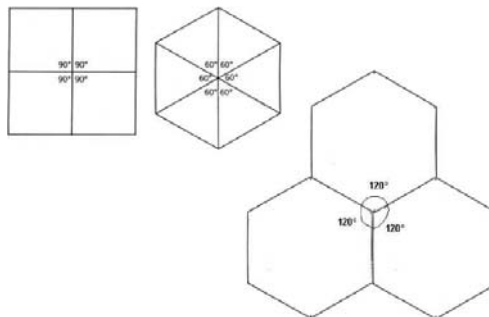
3.1. Mosaics regulars

Els mosaics són construccions geomètriques que resulten de recobrir un pla amb una, o més, figures geomètriques. L'explicació de per què, per exemple, amb els triangles equilàters es pot

enrajolar el terra i amb els pentàgons regulars no és ben senzilla. La suma de tots els angles que es troben en un punt ha de ser 360° . Si fem coincidir sis triangles equilàters, donat que cada angle fa 60° , tenim $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$. Però si fem coincidir tres pentàgons, donat que cada angle fa 108° , tenim $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$. Ens en falten 36° per 360° , un angle massa petit per encaibir un quart pentàgon.



Utilitzant aquesta condició és molt fàcil arribar a la convicció que entre tots els polígons regulars, només el triangle, el quadrat i l'hexàgon permeten enrajolar el terra.



Arribar a la convicció que només hi ha tres mosaics regulars és una activitat que es pot fer a l'últim cicle de primària -tal com es pot veure, per exemple, visitant la pàgina Web realitzada pels mestres i alumnes del CEIP Pompeu Fabra de Lloret de Mar <http://www.xtec.es/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/mosaic.htm>-. També és una activitat habitual en molts dels llibres de text d'ESO.

3.2. Demostració que només hi ha tres mosaics regulars

Una qüestió que resulta més complicada és demostrar per què només hi ha aquests tres mosaics regulars.

Suposem coneguda la fórmula $\frac{180^\circ (n-2)}{n}$, que ens permet saber l'angle interior d'un polígon regular. Com que la suma de tots els angles que es troben en un punt ha de ser 360° , l'angle interior ha de ser un divisor de 360° . És a dir:

$$\frac{180^\circ (n-2)}{n} = \frac{360^\circ}{m} \quad (*)$$

on n indica nombre de costats del polígon regular i m el nombre de polígons que envolten un vèrtex. A partir d'aquesta expressió s'arriba a una equació equivalent:

$$\frac{n-2}{n} = \frac{2}{m} \rightarrow (n-2)m = 2n \rightarrow$$

$$\rightarrow nm - 2m - 2n = 0 \rightarrow nm - 2m - 2n + 4 = 4$$

$$(n-2)(m-2) = 4$$

que té com a solucions enteres positives, amb n més gran o igual que tres:

$$n_1 = 3 \text{ i } m_1 = 6; \quad n_2 = 4 \text{ i } m_2 = 4; \quad n_3 = 6 \text{ i } m_3 = 3$$

Una de les maneres d'arribar a aquest resultat és veure que les possibilitats per escriure 4 com a producte de dos nombres naturals són:

$$1 \cdot 4 = 4 \rightarrow n-2 = 1 \text{ i } m-2 = 4 \rightarrow n = 3 \text{ i } m = 6$$

$$2 \cdot 2 = 4 \rightarrow n-2 = 2 \text{ i } m-2 = 2 \rightarrow n = 4 \text{ i } m = 4$$

$$4 \cdot 1 = 4 \rightarrow n-2 = 4 \text{ i } m-2 = 1 \rightarrow n = 6 \text{ i } m = 3$$

La tècnica que s'ha aplicat a l'apartat anterior és la que s'aplica per resoldre un cas particular de l'equació diofàntica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. La tècnica de resolució d'aquesta equació depèn dels valors d' A , B i C . Els valors d'aquests coeficients determinen diferents tipus d'equacions que reben el nom de les corbes que l'equació representa en el pla: una recta doble, una elipse, una paràbola o una hipèrbola (o un parell de rectes). Aquestes corbes són el conjunt de solucions reals. En les equacions diofàntiques el conjunt de solucions està representat per punts aïllats en el pla amb coordenades enteres. Quan $A = C = 0$ i $B \neq 0$ ens trobem en l'anomenat cas hiperbòlic simple. La resolució es fa de la manera següent:

En ser $A = C = 0$, l'equació original es redueix a $Bxy + Dx + Ey + F = 0$, per tant:

$$Bxy + Dx + Ey + F = 0$$

$$Bxy + Dx + Ey = -F$$

$$B^2xy + BDx + BEy = -BF$$

$$B^2xy + BDx + BEy + DE = DE - BF$$

$$(Bx + E)(By + D) = DE - BF$$

Els valors de x i y es poden trobar a partir dels divisors de $DE - BF$. Siguin $d_1, d_2, \dots, d_n$ tots els divisors de $DE - BF$. Les solucions són:

$$Bx + E = d_i \quad By + D = \frac{(DE - BF)}{d_i}$$

$$Bx = d_i - E \quad By = \frac{(DE - BF)}{d_i} - D$$

$$x = \frac{d_i - E}{B} \quad y = \frac{(DE - BF)}{Bd_i} - \frac{D}{B}$$

3.3. Transformacions de funcions

En el nivell de Batxillerat, una altra manera de demostrar que només són possibles aquestes tres solucions consisteix a interpretar aquestes solucions com a punts de coordenades enteres positives, amb la primera coordenada més gran o igual que tres, de la gràfica de la funció

$$f(x) = \frac{2x}{x-2} \text{ ja que l'equació (*) es pot trans-}$$

formar de la manera següent:

$$\frac{180^\circ (n-2)}{n} = \frac{360^\circ}{m} \rightarrow (n-2)m = 2n \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{2n}{n-2}$$

Les transformacions permeten ajudar a trobar els punts de coordenades enteres positives amb la primera coordenada més gran o igual que tres. En efecte, la funció $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ es pot

transformar en $f(x) = 2 + \frac{4}{x-2}$. Per tant, la

gràfica d'aquesta funció es pot considerar com la que resulta de fer una translació de dues unitats cap amunt a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{4}{x-2}$, la qual al seu torn es pot consi-

derar com la gràfica que resulta de fer una

translació de dues unitats cap a la dreta a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{4}{x}$, la qual és una

dilatació de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$

La funció $f(x) = \frac{1}{x}$ només té un punt amb les dues coordenades enteres positives -el punt

(1,1)-. La funció $f(x) = \frac{4}{x}$ només té tres

punts de coordenades enteres positives ja que, en multiplicar per quatre les ordenades dels

punts de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$, els

únics valors tals que el seu producte per 4 sigui un nombre natural són 1, 1/2 i 1/4. Per tant, els punts de coordenades enteres positives són (1,4), (2,2) i (4,1). D'altra banda, aquests tres punts són els únics que en sumar dos a la seva primera coordenada, continuen donant com a resultat punts de coordenades enteres positives: (3,4), (4,2) i (6,1). I aquests tres punts són els únics que en sumar dos a la seva segona coordenada, continuen donant com a resultat punts de coordenades enteres positives: (3,6), (4,4) i (6,3).

D'altra banda, la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ només té un altre punt amb les dues coordenades enteres negatives -el punt (-1,-1)-. La funció

$f(x) = \frac{4}{x}$ només té tres punts de coordenades

enteres negatives, ja que en multiplicar per quatre les ordenades dels punts de la gràfica de

la funció $f(x) = \frac{1}{x}$, els únics valors que el seu

producte per 4 sigui un nombre enter negatiu són -1, -1/2 i -1/4. Per tant, els punts de coordenades enteres negatives són (-1,-4), (-2,-2) i (-4,-1). D'altra banda, aquests tres punts són els únics que en sumar dos a la seva primera coordenada continuen donant com a resultat punts de coordenades enteres: (1,-4), (0,-2) i (-2,1). I aquests tres punts són els únics que en sumar dos a la seva segona coordenada continuen donant com a resultat

punts de coordenades enteres: (1,-2), (0,0) i (-2,3).

Per tant, els únics punts de coordenades enteres positives de la gràfica de la funció

$f(x) = \frac{2x}{x-2}$, amb la primera coordenada més

gran o igual que tres són: (3,6), (4,4) i (6,3).

3.4. Mosaics semiregulars

Un mosaic semiregular és la composició formada per dos o més tipus de polígons regulars de manera que la distribució dels polígons regulars al voltant de qualsevol vèrtex del mosaic sigui sempre la mateixa. El nombre mínim de polígons regulars és tres ja que si considerem només dos polígons regulars resulta que:

$$\frac{180^\circ (m-2)}{m} + \frac{180^\circ (n-2)}{n} = 360^\circ$$

$$\frac{m-2}{m} + \frac{n-2}{n} = 2$$

i la suma de dues fraccions inferiors a la unitat no pot ser dos. D'altra banda, el nombre màxim de polígons regulars és 6 ja que no hi ha cap polígon regular amb un angle interior inferior a 60°.

Si intervenen tres polígons regulars de costats n , m i p respectivament s'ha de complir la següent equació:

$$\frac{180^\circ (m-2)}{m} + \frac{180^\circ (n-2)}{n} + \frac{180^\circ (p-2)}{p} = 360^\circ$$

que simplificada queda: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$

En el cas de quatre polígons regulars s'arriba a

la igualtat $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Per a cinc s'arriba a:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$$

I per a sis a:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 2$$

La tècnica basada en la transformació de funcions es pot aplicar per investigar quins són els mosaics semiregulars. La investigació que proposem és una modificació de la que es proposa en Alsina, Pérez i Ruiz (1989, p. 104).

Investigació 1:

Les solucions de l'equació $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ sabem que són 10.

- Quin és el mosaic regular que resulta de la composició de tres polígons regulars iguals? A partir d'aquest resultat pots trobar una solució de l'equació anterior.
- Ara volem saber les solucions de l'equació anterior en què intervenen dos polígons regulars iguals. Per trobar-les suposa $m = p$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.
- Ara volem trobar totes les solucions en les quals intervé un triangle equilàter. Per trobar-les suposa $p = 3$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.
- Ara volem trobar totes les solucions en les quals intervé un quadrat. Per trobar-les suposa $p = 4$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.

e) Quines són les deus solucions?

Investigació 2:

Les solucions de l'equació $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sabem que són 4.

- Quin és el mosaic regular que resulta de la composició de quatre polígons regulars iguals? A partir d'aquest resultat pots trobar una solució de l'equació anterior.
- Ara volem saber les solucions de l'equació anterior en les quals intervenen dos quadrats. Per trobar-les suposa $p = q = 4$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.
- Ara volem trobar totes les solucions en què intervenen dos triangles equilàters. Per tro-

bar-les suposa $p = q = 3$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.

e) Quines són les quatre solucions?

Investigació 3:

Les solucions de l'equació

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$$

sabem que són 2 i que en les dues hi ha tres triangles equilàters. Quines són les dues solucions?

Investigació 4:

Les solucions de l'equació

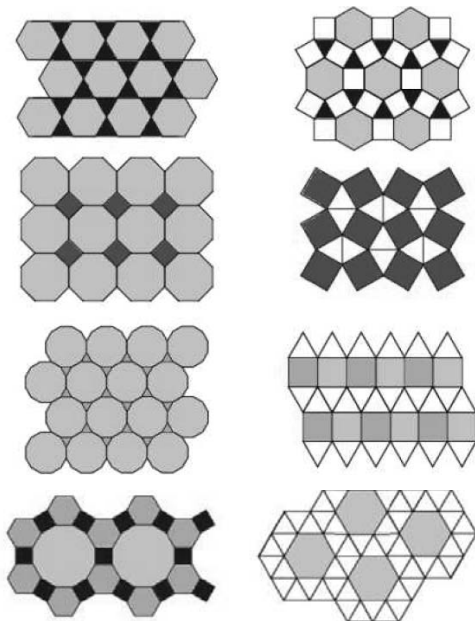
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 2$$

sabem que només és una. Quina és?

Un cop els alumnes han trobat les 17 solucions, tres d'elles són les formades per tres polígons regulars: (6,6,6), (4,4,4,4) i (3,3,3,3,3,3). En les altres 14 hi intervenen dos o tres polígons regulars diferents, que poden envoltar un vèrtex de diferents maneres. Per exemple, la solució (3,3,3,4,4) permet construir dos mosaics diferents. D'altra banda hi ha solucions que permeten envoltar un vèrtex, però no tots els vèrtexs com, per exemple, la solució (5,5,10). Un cop eliminades les solucions (3,3,4,12), (5,5,10), (4,5,20), (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18) i (3,10,15) -aquestes quatre últimes també es poden eliminar pel fet que si hi intervé un triangle equilàter els altres dos polígons han de ser iguals- els alumnes podem trobar tots els mosaics semiregulars realitzant una investigació similar a la que es proposa en Alsina, Pérez i Ruiz (1989, pp. 106-107).

Investigació 5:

De les 17 solucions obtingudes, 3 corresponen als mosaics regulars i 7 no poden formar mosaics. Les 7 restants permeten construir tots els mosaics semiregulars. Explica amb quina solució es correspon cada un d'ells:



4. Conclusió

En aquest article hem mostrat algunes aplicacions pràctiques de les transformacions de funcions que poden donar idees sobre la manera d'ensenyar-les. D'altra banda, considerem que l'aplicació de les transformacions de funcions als mosaics semiregulars tal com s'ha exposat en aquest treball pot ser la base per a un treball de recerca de 2n de batxillerat.

BIBLIOGRAFIA

ALSINA C.; PÉREZ, R.; RUIZ, C. (1989) *Simetría dinámica*. Síntesis: Madrid

JANVIER, C.: (1987). Translation processes in mathematics education, en Janvier, C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pàgs. 27-32). Lawrence Erlbaum A.P.: Hillsdale, New Jersey.

Subscriu-t'hi

BIAIX

Col·labora-hi

e-mail: biaix@elistas.net

www.ice.urv.es/apmcm/biaix.html

La travessa com a joc d'atzar

Josep Lluís Cañadilla

IES Baix Penedès. jcanadil@pie.xtec.es

Introducció

Les màquines escurabutxaques, els casinos, els bingos, les loteries,... les mil i una formes de gastar diners i guanyar-ne són molt abundants en la nostra societat. Així ho demostren les dades facilitades pel Ministeri de l'Interior al 1995: a l'estat Espanyol es van gastar en aquests jocs d'atzar 3,1 bilions de pessetes anuals (la meitat que en alimentació); concretament, més d'un bilió de pessetes en màquines escurabutxaques i 62.000 milions de pessetes en la travessa. La gent busca guanyar diners, molts i ràpidament, i no se n'adona de la poca probabilitat que hi ha de guanyar. La qüestió ha arribat a transcendir tant que s'han creat associacions de ludòpates per lluitar contra l'addicció al joc.

El paper que juguen els jocs d'atzar en la nostra societat és força complex. A l'Estat li permeten recaptar diners per la via dels impostos, i també són moltes les persones que viuen del comerç d'aquests productes. En molts casos es crea un hàbit de joc i es converteix en "*la ilusión de todos los días*". Per Nadal la loteria és objecte de regal i de participació col·lectiva. Es creen penyes futbolístiques per fer travesses. A l'ONCE, i a tota mena de col·lectius i associacions, les loteries els permeten aconseguir diners per a diferents accions socials.

Els jocs d'atzar no són exclusius de la nostra cultura actual. Pensem que hi ha referències històriques molt conegudes. A la Bíblia trobem aquesta frase: "...es van jugar als daus les seves vestidures...". Cap al 1654 el cavaller de Méré va plantejar a Pascal diverses qüestions de probabilitat sobre el joc dels daus, Pascal i Fermat van intercanviar diverses cartes sobre aquest problema, el contingut de les quals va consti-

tuir el punt de partida de la moderna teoria de probabilitats.

A nosaltres, els professors i les professores, els jocs d'atzar ens permeten treballar de forma contextualitzada la combinatòria i la probabilitat. Els daus, les monedes i les cartes són un bon exemple de material manipulatiu per treballar a la classe. Les loteries: el cupó de l'Once, el dècim de la Loteria Nacional, la Loto 6/49, el trio, etc. acostumen a ser objecte d'activitats proposades a l'alumnat. Per exemple, en el cas concret de la travessa de futbol, acostumem a preguntar:

"Quantes travesses diferents de 15 resultats hi ha?", "Quina és la probabilitat que el primer resultat d'una travessa sigui un 2? I que tots 15 resultats siguin dosos?".

Les solucions que donem són:

El nombre de travesses possibles és:

$$VR_{3,15} = 3^{15} = 14.348.907.$$

P(sortir el primer un 2) =

$$= \frac{CF}{CP} = \frac{1}{3} \cong 0,3333 \text{ o bé } 33,3 \%$$

P(tots dosos) =

$$= \frac{CF}{CP} = \frac{1}{3^{15}} \cong 6,969 \cdot 10^{-8} \text{ o bé el } 0,000007 \%$$

La primera solució és un càlcul combinatori. Per a les altres dues estem suposant que:

- les travesses són un joc d'atzar. Ho són en el sentit que no podem predir el resultat d'un partit, el resultat és incert. Però no ho són en el sentit que no podem repetir els partits tantes vegades com nosaltres vulguem amb les mateixes condicions.

- tots els esdeveniments elementals són equiprobables, premissa indispensable per poder aplicar la fórmula de Laplace. És a dir, estem suposant en la segona pregunta que l'1, l'x i el 2 tenen les mateixes possibilitats de sortir, i en la tercera pregunta estem suposant que qualsevol de les travesses possibles té les mateixes possibilitats de sortir que una altra. Però són realment equiprobables aquests esdeveniments elementals? Aquells/es que sapigueu una mica de futbol, sabreu que acostumen a sortir més 1 que x o que 2, per què el fet de jugar a casa comporta una sèrie d'avantatges que facilita guanyar el partit.

Freqüència relativa i probabilitat

Suposant que es tracti d'un veritable joc d'atzar, si els esdeveniments no són equiprobables, com podem respondre a les dues preguntes anteriors? Recordem, per un moment, com solucionem el problema de la xinxeta: "En llançar una xinxeta, aquesta pot caure punxa amunt o de costat. Quina és la probabilitat de caure de costat?". No podem aplicar la fórmula de Laplace i dir que la probabilitat és 0,5, perquè els dos esdeveniments no són o no sabem si són equiprobables. No ens queda més remei que llançar la xinxeta moltes vegades i observar la tendència de les freqüències relatives de l'esdeveniment "caure de costat". Aquest nombre al qual tendeixen les freqüències relatives és la probabilitat de l'esdeveniment "caure de costat".

Amb les travesses de futbol podríem utilitzar un procés semblant. He compilat informació sobre els resultats de les travesses corresponents a les deu últimes temporades, des de la 92/93 fins a la 01/02. Les dades les podeu trobar a la pàgina web de l'Organismo Nacional de Loterías y Apuestas del Estado, estan en format pdf. Per al tractament de les dades he utilitzat el full de càlcul Microsoft Excel; he dedicat un full a cada temporada i un altre al resum de les dades obtingudes.

He observat que a la temporada 92/93 es van jugar 41 jornades, el nombre total d'1 va ser 279, el d'x 184 i el de 2 va ser 152; això representa un 45,37%, 29,92% i 24,72%, respectivament. La taula 1 ens mostra els resultats de les deu temporades:

Taula 1

temporada	jornades	1	x	2
92-93	41	45,37%	29,92%	24,72%
93-94	36	47,22%	29,81%	22,96%
94-95	40	45,33%	31,17%	23,50%
95-96	38	43,68%	28,95%	27,37%
96-97	42	47,14%	26,35%	26,51%
97-98	40	46,83%	29,33%	23,83%
98-99	42	45,87%	28,73%	25,40%
99-00	41	45,37%	29,76%	24,88%
00-01	42	48,57%	27,30%	24,13%
01-02	43	44,03%	29,61%	26,36%

He calculat el màxim, el mínim, el rang, la mediana i la mitjana ponderada dels tres valors. El resultat ha estat el següent:

Taula 2

	1	x	2
mínim	43,68%	26,35%	22,96%
mitjana ponderada	45,94%	29,07%	24,99%
mediana	45,62%	29,47%	24,80%
màxim	48,57%	31,17%	27,37%
rang	4,89	4,82	4,41
desviació típica	1,512	1,381	1,433
coeficient de variació	0,033	0,047	0,057

Aquests resultats ens mostren que en totes les temporades estudiades el percentatge d'1, d'x i de 2 és pràcticament el mateix, amb un rang de 5 punts percentuals. Sembla raonable suposar que hi ha una certa regularitat i adoptar la hipòtesi que els resultats no depenen de la temporada. A més, els valors estan al voltant de 46%, 29% i 25%, respectivament i podem assignar aquests valors com a probabilitats a posteriori dels esdeveniments elementals 1, x i 2. Una vegada adoptat aquest model teòric tenim que els elementals 1, x i 2 no són equiprobables; per exemple, hi ha el doble de possibilitats que

el primer resultat sigui un 1 que sigui un 2. A tall d'anècdota, podem dir que la norma que els partits guanyats valen tres punts, que va entrar en vigor la temporada 95/96, no ha fet baixar el percentatge d'empats dels partits que surten a la travessa.

Tenint en compte aquests resultats, la resposta a la segona pregunta del problema inicial és:

$$P(\text{sortir el primer un } 2) = 0,25$$

Suposant que els resultats dels diversos partits són independents entre si, la resposta a la tercera pregunta del problema inicial és:

$$P(\text{sortir tot dosos}) = (P(\text{sortir dos}))^{15} = 0,25^{15} = 9,313 \cdot 10^{-10}$$

Model probabilístic

A partir d'ara suposaré que la travessa és de 14 partits, es a dir, no tindrè en compte el 15è partit, que en qüestió de premis és un cas especial. Plantegem-nos tres noves qüestions, una mica més complicades:

- Quantes travesses diferents amb set 1, quatre x i tres 2 són possibles?
- Quina és la probabilitat que el resultat d'una travessa sigui:
1 1 1 1 1 1 x x x 2 2 2
- Quina és la probabilitat que el nombre d'1 sigui set, el d'x sigui quatre i el de 2 sigui tres?

La resposta a la primera pregunta ens la dona la combinatòria:

$$PR_{14}^{7,4,3} = \frac{14!}{7! \cdot 4! \cdot 3!} = 120.120$$

La resposta a la segona pregunta, tenint en compte la independència, és:

$$P(111111xxxx222) = (0,46)^7 \cdot (0,29)^4 \cdot (0,25)^3 = 4,816 \cdot 10^{-7}$$

La resposta a la tercera pregunta es basa en què els 120.120 esdeveniments tenen la mateixa probabilitat i són incompatibles.

$$P(\text{set 1, quatre x i tres 2}) =$$

$$PR_{14}^{7,4,3} \cdot (0,46)^7 \cdot (0,29)^4 \cdot (0,25)^3 = 0,0579$$

Acabem de trobar un model probabilístic del nombre d'1, d'x i de 2 d'una travessa de futbol:

$$P(a \text{ 1, } b \text{ x i } c \text{ 2}) =$$

$$PR_{14}^{a,b,c} \cdot (0,46)^a \cdot (0,29)^b \cdot (0,25)^c$$

Comparem el nostre model probabilístic amb els resultats de les travesses de les deu últimes temporades. La taula 3 ens mostra les diferents probabilitats en tant per cent segons el nombre d'1 i d'x que obtenim amb el model probabilístic. La taula 4 ens mostra la freqüència relativa en tant per cent segons el nombre d'1 i d'x en les 405 jornades que componen les 10 temporades estudiades.

Taula 3

P		Nombre d'x														
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nombre d'1	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,3	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0		
	3	0,0	0,0	0,1	0,2	0,5	0,8	1,0	0,8	0,5	0,2	0,0	0,0			
	4	0,0	0,0	0,3	0,8	1,6	2,3	2,2	1,4	0,6	0,2	0,0				
	5	0,0	0,2	0,8	2,1	3,6	4,2	3,2	1,6	0,5	0,1					
	6	0,0	0,4	1,6	3,8	5,5	5,1	3,0	1,0	0,1						
	7	0,1	0,7	2,6	5,0	5,8	4,0	1,6	0,3							
	8	0,1	1,0	3,0	4,6	4,0	1,9	0,4								
	9	0,2	1,0	2,4	2,8	1,6	0,4									
	10	0,2	0,8	1,3	1,0	0,3										
	11	0,1	0,4	0,4	0,2											
	12	0,1	0,1	0,1												
	13	0,0	0,0													
	14	0,0														

Taula 4

Fr	Nombre d'x															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Nombre d'1	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,2	0,0	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0		
	3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	1,5	0,2	0,2	0,5	0,0	0,0			
	4	0,0	0,0	0,5	0,5	1,2	1,5	2,7	0,5	0,7	0,0	0,0				
	5	0,0	0,5	1,5	2,2	2,7	4,7	4,0	1,0	1,0	0,0					
	6	0,0	0,2	2,0	5,4	3,7	5,4	2,2	1,5	0,0						
	7	0,0	1,2	2,0	4,2	6,2	6,2	2,2	0,0							
	8	0,5	0,5	2,5	4,9	5,2	1,2	0,7								
	9	0,0	1,2	2,2	3,5	0,7	0,2									
	10	0,0	0,7	1,7	1,0	0,7										
	11	0,0	0,0	0,2	0,2											
	12	0,0	0,0	0,0												
	13	0,0	0,0													
	14	0,0														

Simulació

Arribats en aquest punt, ens podem plantejar com podem fer una simulació del resultat del primer partit de la travessa. Us proposo quatre possibilitats:

- Llançar enlaire un dau A de sis cares amb dos 1, dos x i dos 2. (33%, 33% i 33%)
- Llançar enlaire un dau B de sis cares amb tres 1, dos x i un 2. (50%, 33% i 17%)
- Llançar enlaire un dau C de cent cares amb quaranta-sis 1, vint-i-nou x i vint-i-cinc 2. (46%, 29% i 25%). En aquest cas és millor fer servir la tecla RND de la calculadora i observar les dues últimes xifres.
- Llançar enlaire un dau D de sis cares amb sis 1. (100%, 0%, 0%)

Vists els resultats de les 10 temporades estudiades, el millor dau per fer la simulació seria el C, seguit del B.

La simulació ens permet obtenir tantes traveses com vulguem "en condicions semblants" a la que s'obté els diumenges, setmana darrere setmana, al llarg de totes les jornades de totes les temporades, però sense haver d'esperar tant de temps.

A la taula 5 teniu una simulació feta amb el dau A de 6 cares amb dos 1, dues x i dos 2; el dau B

amb tres 1, dues x i un 2; i el dau C (realment ho he fet amb la calculadora observant les dues últimes xifres que surten cada vegada que pitgem la tecla RND; del 01 fins al 46 interpretarem que és un 1, del 47 al 75 interpretarem que és una x i del 76 al 00 interpretarem que és un 2).

Taula 5

Partit	dau A	dau B	dau C (Calculadora)	
1	1	x	5	1
2	2	2	25	1
3	1	1	82	2
4	1	1	38	1
5	2	1	21	1
6	x	1	2	1
7	2	x	43	1
8	x	1	13	1
9	2	1	78	2
10	x	2	85	2
11	x	1	43	1
12	1	x	70	x
13	x	x	38	1
14	x	2	58	x

Si utilitzem la simulació per fer una travessa, quina és la probabilitat, amb cadascun dels daus anteriors, d'encertar el primer resultat? Amb el dau A, la probabilitat d'encertar  s del 33,33%, amb el dau B  s del 36,82% i amb la calculadora  s del 35,82%. Les taules 6, 7 i 8 ens mostren aquest resultat teòric. Observeu que si haguéssim fet la simulació amb el dau D (amb tot 1), la probabilitat d'encertar seria del 46%.

Taula 6

simulació dau A	1r resultat travessa	
	46% 1	$33\% \cdot 46\% = 15,18\%$
33% 1	29% x	
	25% 2	
	46% 1	
33% x	29% x	$33\% \cdot 29\% = 9,57\%$
	25% 2	
	46% 1	
33% 2	29% x	
	25% 2	$33\% \cdot 25\% = 8,25\%$
Probabilitat d'encertar:		33%

Taula 7

simulació dau B	1r resultat travessa	
	46% 1	$50\% \cdot 46\% = 23\%$
50% 1	29% x	
	25% 2	
	46% 1	
33% x	29% x	$33\% \cdot 29\% = 9,57\%$
	25% 2	
	46% 1	
17% 2	29% x	
	25% 2	$17\% \cdot 25\% = 4,25\%$
Probabilitat d'encertar:		36,82%

Taula 8

simulació dau C	1r resultat travessa	
	46% 1	$46\% \cdot 46\% = 21,16\%$
46% 1	29% x	
	25% 2	
	46% 1	
29% x	29% x	$29\% \cdot 29\% = 8,41\%$
	25% 2	
	46% 1	
25% 2	29% x	
	25% 2	$25\% \cdot 25\% = 6,25\%$
Probabilitat d'encertar:		35,82%

Utilitzant un raonament semblant, la probabilitat d'encertar els dos primers resultats  s: amb el dau A, del 10,89%, amb el dau B  s del 13,55% i amb el dau C  s del 12,83%. Observeu que si haguéssim fet la simulació amb el dau D, la probabilitat d'encertar seria del 21,16%. Per tant, el millor dau per simular no ha de ser necessàriament el millor dau per encertar.

El full de càlcul Microsoft Excel incorpora la funció *Aleatorio()* que genera nombres aleatoris entre el 0 i l'1. La fórmula = *Entero (Aleatorio()*N+1)* retorna un nombre natural aleatori entre l'1 i el nombre N. Les dades de la temporada 92/93 estan disposades en 41 files (cada fila és una jornada) i en 14 columnes (cada columna és un resultat de la travessa, no he considerat el 15  partit). A la dreta de les dades he omplert 41x14 cel les amb la fórmula = *Entero (Aleatorio()*6+1)*. A la dreta d'aquests nombres aleatoris he omplert 41x14 cel les amb la fórmula:

=SI(O(X3=1;X3=2);1;SI(O(X3=3;X3=4);"x";2))

Aquesta fórmula transforma els nombres aleatoris en 1, x i 2, segons el dau A. Acabem de simular els 14 resultats de cadascuna de les 41 jornades de la temporada 92/93 amb el dau A.

Comparant els resultats de la simulació amb els resultats de les travesses de la temporada

92/93 hem obtingut que el nombre màxim d'encerts en una jornada ha estat 8, el mínim d'encerts en una jornada ha estat 1 i la mitjana d'encerts per jornada ha estat 4,8.

D'una forma semblant he simulat els resultats amb els daus B i C. Les fórmules són:

DauB:

$SI(O(X3=1;X3=2;X3=3);1;SI(O(X3=4;X3=5);"x";2))$

Dau C: = *Entero (Aleatorio()*100+1)*

= $SI(DT3<=46;1;SI(DT3<=75;"x";2))$

La simulació amb el dau B, a la temporada 92/93, ha donat millors resultats. El màxim nombre d'encerts en una jornada ha estat 10 encerts i el mínim 2. La mitjana ha estat de 5,49 encerts per jornada.

La taula 9 ens mostra els resultats de les simulacions amb els tres daus en les deu temporades.

Taula 9

	Dau A			Dau B			Dau C		
Temporada	Màxim	Mínim	Mitjana	Màxim	Mínim	Mitjana	Màxim	Mínim	Mitjana
92-93	8	1	4,80	10	2	5,49	9	2	5,41
93-94	9	1	4,17	9	2	5,22	9	1	5,47
94-95	7	0	4,58	9	2	5,13	11	2	5,18
95-96	9	1	4,61	10	2	5,13	9	2	5,39
96-97	7	1	3,76	10	2	5,31	9	2	5,19
97-98	8	2	4,83	11	2	5,25	9	2	4,95
98-99	9	0	4,60	11	1	4,90	9	2	5,02
99-00	8	1	4,88	9	1	5,12	9	1	4,56
00-01	9	1	5,05	9	2	5,26	9	2	5,33
01-02	11	1	4,91	9	2	5,14	8	1	4,70
Màxim	11	2	5,05	11	2	5,49	11	2	5,47
Mínim	7	0	3,76	9	1	4,90	8	1	4,56
Mitjana	9	1	4,62	10	2	5,20	9	2	5,12

A la taula 9 podem veure que:

- En cap jornada, de les 405 que hi ha a les 10 temporades, haguéssim encertat un 14, 13 o un 12. Quan s'ha encertat un 11 en una temporada, aquest ha estat l'únic encert d'11 de la temporada.
- La mitjana d'encerts ha estat de 5.
- Els pitjors resultats s'obtenen amb el dau A. Curiosament, la majoria d'instruments que venen a les botigues tenen aquesta distribució.

- Els millors resultats en mitjana s'obtenen amb el dau B, és el que té assignada una probabilitat més gran a l'1.

Observacions

No voldria acabar aquest article sense fer esment a tres qüestions que no he considerat.

- Abans de saber els resultats de la travessa, nosaltres tenim una informació addicional sobre els equips de futbol que fa variar la probabilitat d'alguns resultats. És evident

que, si el primer partit de la travessa el juguen un equip molt bo i un de molt fluixet a casa del bo, la probabilitat de l'1 és més del 0,49 que li hem donat.

- El joc de la travessa de futbol consisteix en encertar els 14 més el 15è partit, els 14 resultats, 13, 12 o 11 resultats, altrament no hi ha premi. El premi no és fix, depèn de la recaptació de la jornada i del nombre d'encertants en cada categoria. Per tant, ens interessa que quan nosaltres encertem hi hagi poca gent que encerti. Per exemple, a la 2a jornada de la temporada 00/01 no hi va haver cap encertant de 15 ni de 14, i els 76 encertants de 13 van cobrar 2.510.109 ptes; dues jornades després els encertants de 13 van ser 6.327 i van cobrar 31.643 ptes cadascú. Amb aquest criteri no és tan temerari posar una x o un 2 al partit del punt anterior.
- Tot aquest article es basa en apostes simples. Hi ha altres possibilitat: posar dobles, triples, reduir al 13, etc.

Activitats per a 2n d'ESO

A l'hora d'omplir una travessa podem tenir en compte els nostres coneixements futbolístics

per determinar si posem un 1, una x o un 2. Hi ha dades, com el fet que hi ha equips més bons que altres, amb més possibilitats de guanyar o perdre, o que un equip porti una mala ratxa, o que a aquest equip li tinc simpatia o no el puc veure, etc, que poden determinar quin signe de la travessa cal posar. Sovint els nostres desigs i coneixements es veuen estroncats pels resultats dels partits.

Si volguéssim omplir la travessa a l'atzar, sense tenir en compte aquests factors, com ho fariem?

Activitat

- 1 Quins d'aquests daus faries servir per omplir una columna d'una travessa, si la volguessis fer a l'atzar? Justifica la teva resposta.
 - a) Un dau amb dos 1, dues X i dos 2.
 - b) Un dau amb tres 1, dues X i un 2.
 - c) Un dau amb tots 1.
- 2 a) Hem anotat els resultats de les travesses de la temporada 2001/2002. Escriu a la columnes de la dreta la quantitat d'1, d'x i de 2 que ha sortit a cada travessa. Escriu el total d'1, d'x i 2 de totes les travesses de la temporada.

Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		1	x	2
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	X	1	X	X	1				
2	1	X	2	2	2	X	1	1	2	1	X	1	1	1	1				
3	1	X	X	2	2	1	1	1	X	X	X	X	X	1	X				
4	1	2	1	2	X	X	1	X	2	2	2	2	X	1	X				
5	1	2	X	X	2	1	1	1	2	1	1	1	X	X	1				
6	X	1	2	X	X	2	2	X	1	1	X	2	X	2	1				
7	2	1	X	1	X	X	1	1	1	2	X	X	2	X	1				
8	1	1	1	X	1	1	2	X	1	X	X	X	X	X	1				
9	1	2	X	1	2	X	2	X	1	2	1	2	1	1	X				
10	X	2	X	X	X	1	1	1	1	1	X	X	2	2	1				
11	X	1	X	2	1	2	X	1	1	2	2	1	2	1	2				
12	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	X	X	1	2				
13	1	2	1	1	1	X	1	X	1	2	1	2	1	X	1				
14	1	X	X	1	1	1	1	X	1	1	1	1	1	X	2				
15	1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1				
16	1	1	1	1	1	1	1	1	X	1	X	X	2	2	1				
17	X	X	2	X	X	1	2	X	X	1	X	1	X	1	X				
18	2	1	2	X	X	X	1	1	X	2	2	1	2	1	1				
19	1	1	2	1	2	2	1	X	1	1	X	X	2	1	1				
20	1	2	X	2	2	X	1	1	2	1	2	2	2	1	1				
21	X	1	1	1	1	1	X	X	1	X	X	1	1	X	2				
22	X	X	2	1	1	2	X	X	1	1	X	X	1	1	2				
23	X	X	2	X	2	1	1	2	1	1	X	X	X	1	X				
24	1	1	X	1	2	2	1	2	X	1	1	X	2	1	X				
25	1	X	1	2	2	1	1	X	X	X	X	X	2	2	X				
26	1	1	X	1	X	X	X	1	X	1	1	1	1	1	2				
27	X	1	2	X	X	1	1	2	1	X	X	2	2	1	2				
28	1	1	1	1	1	1	1	2	X	1	1	X	2	X	1				
29	1	1	2	X	1	2	2	2	X	X	2	1	2	2	X				
30	1	1	2	1	1	1	1	X	1	2	X	X	X	X	2				
31	2	1	X	X	X	2	1	2	X	1	2	X	1	1	X				
32	2	2	1	2	1	X	X	1	1	2	X	2	1	X	1				
33	1	1	X	X	2	X	2	2	X	1	2	X	2	1	X				
34	1	1	2	X	X	1	X	1	1	1	2	X	X	X	2				
35	1	1	X	X	1	1	1	1	X	1	2	2	1	X	X				
36	1	1	1	2	2	1	1	1	X	1	1	1	1	2	X				
37	1	2	1	1	1	2	1	2	X	1	1	1	X	X	2				
38	1	1	2	2	X	2	2	X	2	2	2	2	1	1	2				
39	X	1	1	2	2	X	1	1	1	2	1	X	1	1	1				
40	2	2	2	1	1	2	2	1	X	2	2	1	X	2	1				
41	1	X	2	2	X	X	1	X	1	1	1	2	2	1	1				
42	1	1	X	X	2	2	X	1	1	X	X	1	1	1	2				
43	2	1	X	1	X	X	1	1	X	2	2	X	X	2	2				
Total																			

- b) Troba la freqüència relativa dels tres resultats possibles (1, x, 2), en tant per cent.
- c) Creus que els esdeveniments 1, x i 2 són equiprobables? Justifica la teva resposta.
- d) Nosaltres hem fet el mateix amb les 9 temporades anteriors, i hem obtingut un resultat semblant:

Temporada	1	x	2
92-93	45,37%	29,92%	24,72%
93-94	47,22%	29,81%	22,96%
94-95	45,33%	31,17%	23,50%
95-96	43,68%	28,95%	27,37%
96-97	46,03%	26,03%	25,56%
97-98	46,83%	29,33%	23,83%
98-99	44,76%	28,41%	24,44%
99-00	45,37%	29,76%	24,88%
00-01	47,14%	26,98%	23,49%
01-02	42,33%	27,91%	25,12%

Compara aquests resultats amb els que has obtingut per la temporada 2001/2002.

- e) Tenint en compte l'apartat anterior, com hauria de ser un dau de sis cares per simular els resultat d'una travessa? Coincideix la teva resposta amb la que has donat a l'activitat anterior.
- f) Observa quins articles venen a les botigues per fer les travesses a l'atzar. Descric com són i digues si donen la mateixa possibilitat a tots tres resultats.
- g) Agafa un dau i escriu a les cares tres 1, dos x i un 2. Omple la travessa de la propera jornada amb aquest dau. Quants resultats has encertat? N'haguessis encertat més si l'haguessis omplert amb tots 1?

- h) A la temporada 95/96 es va implantar una norma que feia que l'equip que guanyés el partit s'emportaria tres punts en comptes de dos. Creus que aquesta decisió ha fet que els partits empatats disminuïssin?

Conclusions

En aquest article s'ha proposat: 1) un model probabilístic que permet concloure que, en les travesses, els esdeveniments elementals són independents i no equiprobables i 2) una seqüència didàctica per a treballar aquesta situació a 2n d'ESO. Si volem aprofundir en el tema, pensant en el Batxillerat, podem demanar als alumnes, per exemple, que trobin un model probabilístic escaient o que trobin si hi ha relació entre la quantitat de variants (x i 2) i la quantia dels premis. D'altra banda, cal no oblidar que amb aquest tipus d'activitats, també treballarem aspectes relacionats amb la cultura del joc que són molt importants: mostrar que la probabilitat d'encertar és molt petita i que no podem esperar fer-nos rics jugant als jocs d'atzar.

Jornada 17 22-12-2002

1. R.Betis - At.Osasuna	
2. Espanyol - R.Valladolid	
3. Ath.Bilbao - Alavés	
4. At.Madrid - Rac.Santander	
5. R.Celta - Villarreal	
6. Valencia - Dptvo.Coruña	
7. Màlaga - R.Madrid	
8. Rec.Huelva - R.Sociedad	
9. R.Mallorca - Barcelona	
10. Rayo Vallecano - Sevilla	
11. Levante - Las Palmas	
12. Tenerife - Salamanca	
13. Compostela - Albacete	
14. R.Zaragoza - Xerez	
15. Almeria - Elche	

Treballem matemàtiques amb els contes populars

Trini Colomer i Nuri Ramos¹

CEIP Pere Torrent. Lloret de Mar

Introducció

Tenint present que el conte és una eina molt utilitzada al parvulari i que a tots els nens i nenes d'aquesta edat els agrada molt escoltar-ne, partim d'ells com a fil conductor per treballar, a més a més dels aspectes verbals, tot tipus d'aspectes matemàtics. El tractament dels continguts matemàtics d'un conte s'inicia quan els/les nens/es "l'escolten", "l'expliquen" "el llegeixen" a partir de les vinyetes o "el vivencien" a través de la representació, imaginant com són i què fan els personatges i elements que intervenen en el relat, manipulant els objectes que surten en els contes, descobrint els materials que hi intervenen (palla, fusta, maons, farina, ous...) i posant-se en el seu lloc, tot imitant-los en les seves accions. A banda d'aquestes possibilitats que el conte en sí ofereix, i tenint en compte les edats de referència, hem dissenyat un conjunt d'activitats específiques que tenen com a eix el joc.

Per tal d'argumentar el perquè de l'ús del joc partim de la base que és una activitat no imposada que es fa servir per divertir-se o treure'n un plaer. L'infant a més de divertir-se va assolint coneixements. Així, doncs, és amb el joc quan l'infant, realment, expressa els seus sentiments i les seves vivències. És la seva manera de percebre la realitat que l'envolta, i és el seu vincle entre el seu món interior i l'entorn (Grup Perímetre, 1995). D'altra banda, considerem que és un recurs especialment vàlid per aprendre continguts matemàtics ja que el joc és un plaer per si mateix; el nen/a s'hi implica i se'l

pren molt seriosament; jugant, guanyant i perdent el nen/a aprèn dels seus propis errors i dels errors dels altres. A més, aquestes activitats respecten, perfectament, la diversitat dels alumnes. Tots volen jugar i tots poden jugar en funció de les seves capacitats. També permeten desenvolupar processos psicològics bàsics, necessaris per l'aprenentatge matemàtic, com són: l'atenció i la concentració, la percepció, la memòria, la resolució de problemes, la recerca d'estratègies, etc. (Alsina, 2001).

Objectius

- Treballar els continguts matemàtics tot jugant amb els personatges dels contes.
- Respectar les normes del joc.
- Tenir una actitud positiva davant les possibles dificultats que, de vegades, planteja la resolució matemàtica.
- Buscar estratègies davant del plantejament i solució de situacions diverses.
- Verbalitzar la manera de resoldre una activitat.
- Tenir en compte les aportacions dels companys.

Alguns aspectes matemàtics que es treballen

Lògica:

- Les qualitats perceptibles dels objectes a partir de la manipulació directa

(1) tcolome3@pie.xtec.es/ nramos1@pie.xtec.es

- Etiquetes (afirmatives i ús del signe "X" per a la negació)
- Relacionar i aparellar
- Classificar
- Ordenacions (seqüències, grandàries, de pes,...)
- Seriacions

Nombres i Càlcul:

- Numeració
- Descomposicions de nombres
- Relacionar per quantitats (més-menys, tants com...)
- Formulació d'una pregunta davant d'un plantejament matemàtic (problemes visuals)
- Càlcul mental

Geometria:

- Relacions espacials d'orientació, organització i direccionalitat: davant-darrera, dalt-baix, a un costat-a l'altre, a sobre-a sota, lluny-a prop, endavant-endarrera, amunt-avall, dintre-fora.
- Línia: recta i corba

Mesura:

- Mesura: pes i llargària
- Seqüenciació espàcio-temporal

Organització dels nens i nenes. Planificació

Es juga al llarg de tot el parvulari, depenent de l'adequació de les activitats als diferents nivells. Agrupacions per portar-ho a terme:

1. Gran Grup

- Explicació verbal del conte, ja sigui amb suport visual o sense.
- Lectura de les vinyetes per part dels infants. Ordenació de seqüències.
- Narració per part dels infants.
- Representació.

- Presentació dels diferents jocs relacionats amb el conte.

2. Petit Grup (poden ser grups de 4 o bé en parella)

- Treball per racons amb les diferents activitats preparades.

3. Treball individual (expressió escrita). Es porta a terme quan tot el grup classe ha passat a jugar per totes les activitats preparades. L'infant fa el dibuix del conte, cosa que ens demostra el grau d'assoliment, per part de l'infant, dels conceptes matemàtics treballats.

Exemples:

- El nen o nena dibuixa el llop amb 4 cabretes a fora i ens dona l'explicació de que n'hi ha 3 a dins de la panxa del llop.
- Quan fa el dibuix de "la caputxeta vermella" té molt clar i diferenciat el concepte de *llarg-urt* quan dibuixa els camins per on passen els personatges.
- En el conte de "La rateta presumida" només dibuixa uns quants personatges perquè els altres ja han passat abans.

Activitats²

Els jocs que plantejem, majoritàriament, estan pensats per a treballar el càlcul. Els nens i nenes treballen la numeració, comparen quantitats, les "ajunten", fan descomposicions, estimen i preveuen resultats, memoritzen dades, busquen estratègies, comparen resultats, resolen problemes de càlcul mental,... fins arribar a verbalitzar-lo i a saber-ho expressar gràficament.

Hem dissenyat activitats variades: algunes són per treballar amb retolador "veleda" i esponja, altres, la gran majoria, són de dimensions força grans per treballar a terra, però la qualitat comú a totes és que són molt manipulatives. Gairebé totes són per treballar en petit grup (4 nens), o en parella, en els racons. Les més significatives són:

BLANCANEUS

- Quins animals es poden trobar al bosc?. Classificar els animals i raonar la qualitat que els defineix.

- Relacionar els personatges del conte amb l'objecte corresponent.
- Fer descomposició amb els 7 nans.
- Puzzle
- Memori
- Numeració amb els personatges (imatge1)
- Dominó dels 7 nans
- Problema visual de capacitat (imatge2)
- Problemes visuals amb el rellotge, el llop i les cabretes
- Treball de pes amb les pedretes i amb balances (imatge3)
- Joc de "l'oca" gegant
- Descomposició amb les cabretes i el llop
- Puzles
- Memoris
- Joc de diferències
- Joc de percepció visual (on són els diferents objectes?)
- Descomposició amb les 7 cabretes (imatge 5)
- Treball amb l'ordinador: Clic de les 7 cabretes

Imatge 1



Imatge 2



LES 7 CABRETES

- Joc dels ous (descomposició del 6) (imatge4)

Imatge 3



Imatge 4



(2) Algunes d'aquestes activitats han estat presentades a les IV Jornades de Didàctica de la Matemàtica de Girona (Grup Perímetre, 2000) i a les Jornades d'Educació Infantil de la Universitat de Vic (AAVV, 2002).

Imatge 5



ELS 3 ÓSSOS

- Joc amb daus i personatges (numeració fins el 3) (imatge6)
- Joc de relacionar personatges i objectes
- Ordenacions de gran-mitjà-petit
- Treball de geometria (dret-assegut, davant-darrera)
- Joc de lògica: "parem la taula"

Imatge 6



LA RATETA PRESUMIDA

- Descomposició amb els ninos
- Joc de situació espacial amb fotos i ninos
- Bingo de personatges
- Conte amb imants

ELS 3 PORQUETS

- Joc de relacionar tipus de material amb la casa corresponent

- Joc de relacionar els materials amb cada un dels personatges
- Joc amb daus i personatges

LA CAPUTXETA VERMELLA

- Joc dels camins Caputxeta-Llop (llarg-curt) (imatge7)
- Classificar aliments que vagin o no al cistell
- Memoris
- Ordenació de mides (imatge8)
- Camins amb línia recta i corba
- Joc de lògica amb caputxetes, barrets de la iaia, davantals de la mare i cues del llop.

Imatge 7



Imatge 8



ALI BABÀ

- Joc de percepció visual (on és l'Alibabà?)
- Joc amb les monedes (relacionar quantitat-grafia, i ordenar les bosses de més a menys pes, amb ajut de les balances)

- Joc amb el cofre i els objectes que té (classificar les joies, fer parelles d'arracades, d'anells; ordenar els collarets de llarg a curt i aparellar jocs de collaret-braçalet o collaret-arracades...)

EN PATUFET

- Joc de relacionar imatges
- Ordenació de seqüències amb diferents graus de dificultat

EL GAT AMB BOTES

- Joc de percepció visual amb 3 contes diferents

L'ANEQUET LLEIG

- Cursa d'anequets a l'aigua (imants)
- Cursa amb imants. Joc amb dau-semàfor

EL CARGOL I L'HERBA DE POLIOL

- Cursa amb imants. Joc amb dau de numeració o puntets
- Ordenació d'animals per grandària

EL CONTE DE SANT JORDI

- Joc de l'oca de sant Jordi

INTERCONTES

- Percepció visual
- Relacionar personatges i objectes amb el seu conte corresponent
- Diferències
- Puzles de personatges de 2 i 3 peces

Conclusions

Hem constatat que els nens i nenes de parvulari, a més a més d'estar molt motivats a l'hora

de treballar continguts matemàtics a partir d'un conte, ja que l'activitat té interès per sí mateixa, han après una sèrie d'habilitats, actituds, valors i normes, que han consolidat per sí mateixos:

Exemples:

1. Joc de taula de "la Caputxeta vermella"

Mestra: *Qui creieu que arribarà primer a casa de l'àvia?*

Nen/a: *El llop perquè el seu camí és més curt.*

M: *Com és que la caputxeta ha avançat tant i ja està arribant abans que el llop?*

N1: *Perquè ella ha començat primer.*

N2: *Sí, però li ha sortit el 3 i al llop només el 2*

M: *Què ha de treure el llop per guanyar?*

N: *Un 2.*

M: *Què passarà si treu un 3?*

N: *Que haurà de tornar enrera i pot guanyar la caputxeta.*

M: *Així doncs, com és que al final ha guanyat la caputxeta?*

N: *Perquè ha tret moltes vegades 3.*

M: *Canviem de dau i agafem el de puntets. Creieu que anirem més de pressa per jugar?*

N: *Sí, perquè podrem comptar fins a 6.*

M: *Ara comencem pel llop, a veure què passa.*

N: *el llop quasi guanya perquè és més a prop, però li ha de tocar un 4, sinó no.*

M: *Quin número ha de treure el llop per poder avançar a la caputxeta?(va 3 caselles per endavant).*

N: *un 4 o un 5 o un 6.*

2. Joc de taula de Sant Jordi

M: *Què li ha passat al cavaller? (anava primer i ha caigut al riu)*

N: *que anava primer però com que hem caigut al riu i estarem una vegada sense tirar, algú ens avançarà.*

N: Si em toca un 3 aniré a la moto i aniré molt ràpid!

M: Per què? si la moto diu que has d'anar enrera!

N: Perquè he d'anar 2 enrera i aniré a parar a la rosa i podré fer de rosa a rosa i tornar a tirar.

3. Memoris

N: En Joan ha girat 3 cartronets!

M: Què podem fer quan un nen o nena giri 3 cartronets o quan algú no sap esperar el seu torn?

- Després de moltes propostes arribem a crear una norma per aquestes ocasions: "un cop sense tirar"
- Els nens i nenes per sí mateixos compten les parelles que han fet quan han acabat de jugar abans de guardar-lo.

En definitiva, així doncs:

- Es facilita el procés de socialització dels nens i nenes i, a la vegada, la seva pròpia autonomia personal.

- Aprenen a respectar el torn i són ells mateixos que fan possible que aquest es compleixi.

- S'ajuden molt entre ells, hi ha molta solidaritat, la qual cosa comporta que no siguin competitius.

- Mostren responsabilitat a l'hora de jugar sols, sense l'ajut de l'adult.

- Es fomenta l'experimentació, el tempteig i la descoberta per part dels propis nens/es.

BIBLIOGRAFIA

- Alsina, À. (2001). Matemáticas y juego. UNO, 26, 111-119.
- Grup Perímetre (1995, 2000). Actes de les II i IV Jornades de Didàctica de les Matemàtiques de les Comarques Gironines. Girona: Grup Perímetre
- AAVV (2002). Actes de les Jornades d'Educació Infantil de la Universitat de Vic. Vic: Departament d'Educació Infantil. Facultat d'Educació



Col·labora-hi

Subscriu-t'hi

e-mail: biaix@elistas.net
www.ice.urv.es/apmcm/biaix.html

Les Matemàtiques des d'una perspectiva cultural: Etnomatemàtiques

Miquel Albertí

IES Vallès. a8042020@centres.xtec.es

No acostumem a parlar especial esment als fets i coses que ens resulten més properes i corrents precisament per això, perquè ens resulten massa properes i massa corrents. En canvi, curiosament, és l'interès per allò més llunyà el que ens condueix a l'interès per allò més proper. En introduir-nos en un entorn nou fem comparacions i observem les diferències amb les quals tard o d'hora anirem constituint un conjunt de característiques definidores de lo nostre. Coneixent els altres ens coneixem a nosaltres mateixos. Del coneixement d'altres cultures ens adonem que la nostra és una cultura estranya per a un estranger. Un dels aspectes de les anomenades Etnomatemàtiques és el d'introduir-se a l'estudi d'altres cultures via la nostra matèria, les Matemàtiques. Això significa considerar-les des d'una perspectiva cultural i considerar que aquelles que diem altres cultures també han fet i fan Matemàtiques i han desenvolupat conceptes matemàtics. Depèn de cadascú acabar el viatge lluny o a prop.

1. Càlcul digital

Sarji és mestre d'un poblet del districte de Karangasem, a l'est de l'illa de Bali. Ahir ens va invitar a visitar l'escola on treballa i vam poder assistir d'oients a una de les seves classes. Avui, ell i la seva filla petita Sedani, han vingut en bicicleta fins a Padangbai, on nosaltres ens allotgem. Tots quatre hem passat el matí a la platja. La nena encara no sap nedar i només gosa ficar-se a l'aigua abraçada al coll de son pare.

Com a passatemps, entre capbussada i capbussada, Sarji planteja a la seva filla el càlcul d'algunes sumes, restes y productes de números que escriu guixant a la sorra. Ell escriu una

igualtat amb un interrogant que ella ha de fer desaparèixer, com ara: $3+?=8$. Sedani en resol unes quantes sense cap dificultat i sovint fa servir els dits pels càlculs. Jo els observo amb silenci. No entenc les paraules que xiuxiueja la noia quan doblega els dits per fer una multiplicació, però els seus gestos em fan pensar en unes imatges d'un llibre de Georges Ifrah que a hores d'ara es troba en un prestatge del nostre menjador, a uns tretze mil quilòmetres de distància. Em penedeixo de no haver-lo llegit amb més cura.

Sarji m'invita a què jo plantegi algun exercici a la seva filla. Ho faig de bon grat. Ella també resol sense cap problema aquells que guixo a la sorra. Però se m'acut de plantejar-li un de diferent: $7+?=6$. Sedani se'l mira durant uns moments. Després mira a son pare amb ulls interrogants. Sarji em diu que encara no ho pot fer. La nena només té vuit anys i és alumna de l'escola primària on ensenya son pare. Ahir ja vam parlar de números negatius. Quan érem a casa seva, vam regalar en Sarji un llibre de Matemàtiques escrit en català. Sabíem que no entendria el text, però el llenguatge matemàtic i el de les imatges i fotografies que il·lustren el volum són universals. Mentre el fullejava, en Sarji es va aturar en una frase matemàtica escrita en una pàgina: " $\div 25 = \pm 5$ ". Va mirar-se-la una estona amb silenci i, després de convèncer's a ell mateix de què -5 també és arrel de 25, ens digué que ell sí que sabia que -5 era una arrel de 25, però que això no ho ensenyava a classe. Emfasitzà les seves paraules dient que el fonamental de l'escola local era que els nois i noies aprenguessin a llegir i a escriure.

Li pregunto a en Sarji sobre el sistema digital que usa Sedani per multiplicar. Es basa en el fet de comptar fins a 10 amb una sola mà. Cada

dit es correspon amb una unitat, de l'1 al 5. Les unitats del 6 al 10 es representen amb els mateixos dits, però doblegats:



Me'n posa un exemple: si volem multiplicar, posem per cas, 7 per 6, el procediment és el següent:

- Es compten 7 unitats en una mà i 6 a l'altra.
- Ara els dits doblegats s'interpreten com a desenes. Aleshores tenim dues desenes en una mà i una a l'altra. Total, tres desenes, 30 unitats.
- Tot seguit es multipliquen els dits no doblegats de cada mà: $3 \cdot 4 = 12$.
- Per acabar, s'efectua la suma: $30 + 12 = 42$. Llestos!

Ja de tornada a Barcelona, vaig observar que Ifrah (1987, pp. 92-96) parla d'aquest mètode de càlcul i exposa el rerafons matemàtic que n'explica l'efectivitat. Ifrah relaciona els nombres amb el 5, però relacionar-los amb el 10 pot resultar més aclaridor.

Siguin $X=10-m$ i $Y=10-n$ dos números entre 5 i 10. Així, en comptar-los a cada mà, m i n seran els dits que restaran sense doblegar. Aleshores, $X \cdot Y = (10-m) \cdot (10-n) = 100 - 10m - 10n + mn = 10 \cdot [10 - (m+n)] + mn$. Vet aquí la regla: $m+n$ és el total de dits sense doblegar, $10 - (m+n)$ és el total de dits doblegats que es prendran com a desenes i mn és el producte dels dits sense doblegar.

Quan els números estan compresos entre 10 i 15, 15 i 20, etc. han de fer-se algunes adaptacions. Per a multiplicar dos números entre 10 i 15 s'ha de sumar 100 (quadrat de 10): $14 \cdot 11 = 10 \cdot (4+1) + 4 \cdot 1 + 100 = 154$. Per a multiplicar dos números entre 15 i 20 la regla s'ha d'alterar més i es treballa amb 15 i 225 (quadrat de 15): $17 \cdot 19 = 15 \cdot (2+4) + 2 \cdot 4 + 225 = 323$. Per núme-

ros entre 20 i 25, es prenen 20 i 400 (quadrat de 20): $22 \cdot 23 = 20 \cdot (3+2) + 3 \cdot 2 + 400 = 506$. I així successivament. El problema és que per fer això cal conèixer els quadrats dels múltiples de cinc.

Però Ifrah no explica què passa si només un dels dos nombres és més gran que 5 i aquest és un cas on la regla esmentada no funciona. Siguin X i $Y=10-n$, amb $X < 5$, $5 < Y < 10$ i n el nombre de dits que restaran sense doblegar a la mà on es compta Y . Multiplicant $X \cdot Y = X \cdot (10-n) = 10 \cdot X - X \cdot n$, aconseguim adaptar la regla:

- Compta en una mà el nombre més gran que 5.
- Multipliqua els dits sense doblegar que resten a la mà per l'altre nombre.
- Resta això de tantes desenes com unitats té el nombre menor que 5.

Per a calcular $3 \cdot 8$, primer comptem $8 = 10 - 2$ en una mà on restaran dos dits sense doblegar, després fem $2 \cdot 3 = 6$ i, per últim, $3 \cdot 10 - 6 = 30 - 6 = 24$.

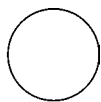
Mesos després de passar aquells dies amb en Sarji, es publicava una revisió ingent de l'obra d'Ifrah on s'esmentava de nou el mètode de càlcul usat per Sedani, però en relació als llocs on s'usa no assenyala l'illa de Bali o Indonèsia: "... *todavía hoy encontramos vestigios de este tipo de técnica en la India, Irán, Siria, Serbia, Besarabia, Valaquia, Auvernia y norte de África*" (Ifrah 1997, cap. 3, nota núm.19, p.162).

Donada la creixent immigració al nostre país, no seria gens estrany que algú com Sedani acabés essent una de les meves alumnes. Com li ensenyaria a multiplicar? La consideraria una ignorant en veure-la emprar els dits? L'obligaria a aprendre de memòria la taula de multiplicar? Sens dubte, una postura més adient seria preguntar-li d'on ve, què sap, qui li ho ha ensenyat i, si desconeix els motius pels quals aquella tècnica funciona, jo, com a professor seu de Matemàtiques, li ho explicaria. Si tenim un alumne d'enfora, hem de conèixer l'enfora!

2. Horitzons, segments i circumferències

Per a mi l'horitzó és tant el límit de la terra que trepitjo com el límit de les aigües on navego. Per a un toraja de Sulawesi l'horitzó és el límit del cel. La concreció final és la mateixa: una línia més o menys corba i més o menys precisa que limita el planeta. Però una línia concebuda de manera diferent. Jo, que he nascut en una petita illa mediterrània sempre he vist l'horitzó com una línia recta (sé que no ho és) definida pel límit del mar. Però per aquell qui viu rodejat de muntanyes i no ha vist mai l'oceà, la idea d'un horitzó rectilini és quelcom increïble. El seu horitzó canvia d'acord amb els perfils irregulars de les serralades que l'envolten, només el cel es manté impertorbable. D'aquí la diferència de prendre una o altra referència en la definició. Sens dubte el concepte de recta em resulta prou senzill perquè d'una forma més o menys conscient el vaig relacionar des de ben petit amb l'horitzó. Li resultarà tan senzill el concepte de recta a un toraja?

D'aquestes dues figures nosaltres¹ en diem segment i circumferència,



mentre que els toraja en diuen *barre* i *barre allo*, respectivament. El mot barre significa allò que el lector s'imagina², el mot allo vol dir Sol. Tenim doncs una *línia* i una *línia amb forma de Sol*. El llenguatge toraja és menys sofisticat que el nostre, però no menys aclaridor.

3. Mots numèrics

Tot i que cada illa i regió de l'arxipèlag posseeix un llenguatge no dialectal propi, el bahasa indonesi és l'idioma institucional que es parla arreu del país i amb el qual els indonesis reben la seva educació. A diferència d'altres idiomes de Sulawesi com ara el Bugis, el Toraja no té escriptura i el seu ensenyament o aprenentatge es redueix a l'àmbit social. A les escoles de Tana toraja no s'ensenya en toraja, sinó en bahasa indonesi, encara que això no impedeix que els locals usin la seva llengua materna per a relacionar-se.

Nomor, que vol dir número en bahasa indonesi, es diu *nomoro'* en bahasa toraja. La taula següent mostra alguns mots amb els quals es designen alguns conceptes numèrics:

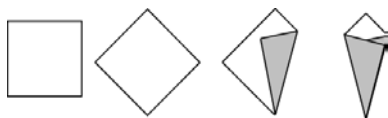
	Bahasa Toraja	Bahasa Indonesi
Nombre parell	Nomoro' ganna (significa nombre complet)	Nomor genap (genap significa complet)
Nombre imparell	Nomoro' la' bi (la'bi significa més i el concepte és que en un nombre imparell hi sobre alguna cosa, un xic més)	Nomor ganjil (ganjil significa peculiar)
Zero (0)	Nomoro' tallo (Tallo significa ou. Sovint, el zero es diu així per la similitud entre la xifra que el representa i la forma de l'ou, però a diferència d'altres números, el zero no té un nom específic)	Kosong (significa buit)
Infinit (∞)	No hi ha cap xifra especial per designar-lo, però una expressió com ara 77777..., derivada de la mitologia toraja, podria representar la idea de quantitat il·limitada	Tak terbatas (en el sentit de què no es poden posar fronteres) Tak berhingga (en el sentit d'inacabable)

(1) Qui som *nosaltres*? Els matemàtics o els ciutadans? Els matemàtics sí que diem segment i circumferència, però els ciutadans i els nostres alumnes...

(2) De fet, el mot *barre* farà pensar en una barra a qui parli castellà i/o català, però aquesta associació lingüística no s'ha de tenir en compte mentre desconeguem l'etimologia del mot *barre*.

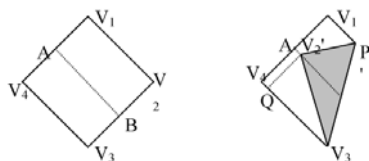
4. Una manera curiosa de plegar tovallons de paper

A quasi totes les taules dels *warungs* (menjadors indonesis) hi ha tovallons de paper a disposició dels clients. Són tovallons quadrats, però sempre s'ofereixin al públic plegats, quasi a tot arreu, d'aquesta forma:



Si hom visita el *warung* a mig matí o a mitja tarda, no serà estrany que trobi algunes cambres que passin l'estona plegant tovallons. No són només elles les encarregades de fer-ho, també hi poden col·laborar altres nois i amics o amigues i, fins i tot, la mestressa de l'establiment en certes ocasions. És una tasca ingent que només d'observar-la fa posar nerviós l'occidental, però que als locals sembla relaxar. La qüestió és que un tovalló es considera ben plegat si queda amb la punxa al bell mig, com passa a l'últim de la figura anterior. Com s'han de fer els plecs per tal d'assolir aquest objectiu? Aquells que fan la feina potser ho desconeixen, però un matemàtic pot esbrinar-ho.

Atesa la superposició de tres plecs, l'angle final al vèrtex inferior (V_3 a la figura següent) ha de ser d'un terç d'angle recte, és a dir, de 30° . Ho aconseguirem si el primer plec es fa portant el vèrtex V_2 del quadrat fins a l'eix AB que uneix els punts mitjans de dos costats paral·lels del quadrat. Aquest eix és el que s'ha de prendre com a referència per a realitzar el primer plec. Després, portarem el vèrtex V_4 al damunt de PV_3 :



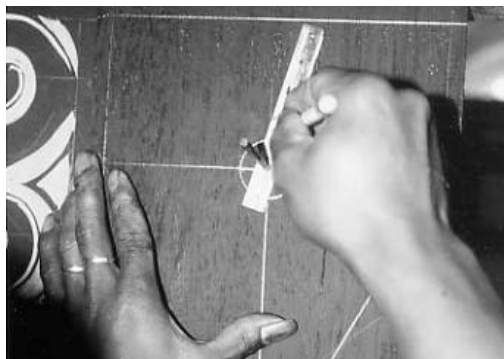
Si c és el costat del quadrat, aleshores $AV_4=QV_2'=c/2$ amb $V_3V_2'=c$ i, per tant, l'angle QV_3V_2' és de 30° . L'angle recte al vèrtex V_3 és la suma d'aquest angle de 30° més dos

cops l'angle PV_3V_2' . Aleshores, l'angle final a V_3 un cop enllestida la feina serà de 30° .

Qui plega els tovallons podrà ser o no conscient d'això, però el cert és que si no pren l'esmentada referència, no tindrà èxit. I aquells qui, per bona traça o com a conseqüència de la pràctica, ho facin bé, serà gràcies a què han pres la referència dita, en siguin conscients o no.

5. Els gravadors toraja

Els toraja de Sulawesi construeixen les seves cases (*Tongkonan*) i graners (*Alang-alang*) amb fusta i bambú. Ambdues construccions es decoren amb dissenys que es tallen a les façanes exteriors. La simetria juga un paper fonamental a cadascuna d'aquestes decoracions, tant pel que fa a la seva ubicació en la construcció com pel que fa a les variacions que de cada motiu bàsic es fan. El gravat es fa en una planxa rectangular de fusta i s'inicia guixant amb llapis una quadrícula que servirà de sistema de referència al gravador. Sense saber-ho, la seva feina serà el resultat d'aplicar un seguit de transformacions isomètriques a determinades figures. Per això necessita traçar paral·leles, perpendiculars, centres de quadrats i de rectangles, dividir un segment en dues, tres o més parts, fer circumferències, determinar el punt simètric d'un altre en relació a una recta, etc. Les eines i estris de què disposa són llapis, goma d'esborrar³, compàs⁴ (fotografia 1), un regle de bambú sense subdivisions, una massa per colpejar i punxons de mides diferents per a realitzar el gravat buidant la fusta.



(3) Curiosament, la goma d'esborrar serveix també per guixar sobre la fusta.

(4) Pot tractar-se d'un compàs com els que coneixem aquí, però més corrent és fer servir com a compàs l'angle entre el polse i l'índex d'una mà, unes tisores, o un compàs de bambú l'ús del qual es pot veure a la fotografia 1.

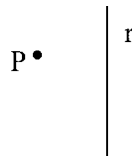
Aquells qui es dediquen a aquesta tasca han rebut només una educació primària més o menys obligatòria o han abandonat l'escola essent encara nens. Comencen com a aprenents i el seu aprenentatge no és acadèmic. Qui els ensenya és un orang tua, un vell. Quan se'ls pregunta sobre la necessitat de saber Matemàtiques per fer la seva feina diuen que no. O diuen que sí entre rialles! Però és evident que, la coneguin o no, hi ha en aquella societat una via de transmissió de coneixement que actua al marge del sistema educatiu institucional mitjançant el qual es transmet de generació en generació un coneixement matemàtic de riquesa indubtable.

La fotografia 2 mostra exemples de les decoracions esmentades presents a la façana lateral d'un graner. Es distingeixen frisos amb grup de simetria⁵ del tipus p111, pm11, p1a1 i pmm2. El gran gravat de l'esquerra es diu *Pa' Lembang* i el seu grup de simetria és CM, mentre que el de la dreta es diu *Pa' Erong*, amb grup de simetria PGG. Convé assenyalar que el fris central en vertical rep el mateix nom que el gravat de l'esquerra perquè n'és un fragment seu.



El disseny més utilitzat és l'anomenat *Pa' Tedong* (*tedong* significa búfal). Es tracta d'un gravat que representa la visió frontal del cap d'un búfal, el seu semblant. El búfal és l'animal característic de la cultura toraja i, amb el gall, el més apreciat de tots. Tant l'un com l'altre ocupen llocs destacats en les decoracions de les cases i graners tradicionals escampats arreu de la regió. Dintre mateix de Tana Toraja el mateix disseny, tot i rebre el mateix nom, pot presentar diferències d'execució i acabat. Un dia vaig tenir la oportunitat d'observar el treball d'en Sever, tallista d'un petit poble situat al sud-est de Tana Toraja. Arribat el moment de situar els ulls del búfal en el *Pa' Tedong* que estava acabant, en Sever va assenyalar un ull de l'ani-

mal en un punt P, més o menys arbitrari, a un costat de l'eix vertical que partia en dues parts la cara de l'animal. Evidentment no podia posar l'altre ull a qualsevol lloc, sinó allí on quedaria el simètric de P mitjançant r:



Per dur a terme la tasca, Sever seguí els passos següents:

- i. Va triar un punt Q qualsevol de r i va traçar la circumferència amb centre a Q i radi QP.
- ii. Després en va triar un altre, T, i traçà la circumferència amb centre a T i radi TP.
- iii. Ambdues circumferències es tallaren en dos punts. Un era el primer ull, P, que ja havia assenyalat. L'altre era on havia de posar el segon, el simètric de P respecte de r.

Qui li ho havia ensenyat a fer-ho així era el seu avi. No ho va aprendre a l'escola. Per ell es tractava d'un tècnica no relacionada amb el coneixement matemàtic. Jo em vaig preguntar si sabia resoldre un problema semblant en un altre context, com ara amb llapis i paper. També em vaig preguntar què faria en Sever si la recta r no fos vertical, ans obliqua.

No sé fins a quin punt els professors de Matemàtiques de Tana Toraja són conscients de la riquesa matemàtica subjacent en moltes de les activitats quotidianes del seu entorn cultural i molt especialment en la feina dels tallistes, però sé que aquesta riquesa no s'ha incorporat hores d'ara al currículum de Matemàtiques dels plans educatius locals. Quan això es faci, sens dubte s'afavorirà un recolzament i una consideració de tothom en vers activitats artesanes que avui dia no reben per part de la societat el reconeixement merescut. Conseqüència de tot plegat seria l'assoliment d'una cohesió cultural d'àmbit acadèmic i social.

(5) La nomenclatura dels grups de simetria corresponents al cas unidimensional (frisos) es la que proposa M. Ascher (1991). Per el cas bidimensional (mosaics) la referència és Washburn, Dorothy K. i Crowe, Donald W. (1988).

6. Etnomatemàtiques: les Matemàtiques dels pobles i les gentes

A diferents punts del planeta vivim en cases diferents aixecades amb tècniques de construcció adequades al terreny i a la climatologia. Els individus de cada cultura segueixen unes regles socials particulars. Arreu del planeta la llengua constitueix un dels trets més característics que cada poble ha desenvolupat a la seva manera. Essent així, no ens hauria de resultar estrany als qui pensem que les Matemàtiques han format part de l'humanisme sostenidor de qualsevol cultura, considerar-les també un d'aquests trets diferencials a totes les cultures que es veuen, es fan i s'entenen d'una forma particular a cada lloc.

Cada civilització usa uns mots particulars per a referir-se a conceptes universals, però l'origen significatiu dels mots emprats porten implícit el sentit que cada civilització atorga al mateix concepte, el seu matís particular, la seva empremta. El mateix passa amb els conceptes matemàtics. Les paraules amb què cada llengua diu parell o imparell, punt, recta, corba, rectilini, cercle, circular, distància, angle, pla, horitzontal, vertical, pendent, longitud, superfície, volum, infinit, no traspuen una manera diferent de concebre la circularitat, la horitzontalitat, la infinitat, i tantes altres característiques?

La recerca antropològica s'ha dedicat principalment a estudiar aspectes socials d'una cultura, com ara temes de tipus religiós, de parentiu, sexual, social, econòmic, arquitectònic, etc. Fins fa poc no s'havien dut a terme recerques antropològiques relacionades directament amb les Matemàtiques. El motiu no és que no hagi res per buscar ni que a les cultures diferents de la occidental no s'hagin fet mai Matemàtiques. Arreu del planeta tothom ha sabut comptar, mesurar i calcular des de molt abans de què la colonització exportés unes Matemàtiques determinades i una forma determinada d'entendre-les, de fer-les i d'ensenyar-les. A la seva manera cada poble ha desenvolupat una parla, una escriptura, unes tècniques per mesurar, comptar, dissenyar i construir habitatges per les quals es necessiten conceptes matemàtics. Uns conceptes inseparables de l'àmbit cultural on han sorgit i que s'han transmès de generació

en generació al marge dels camins acadèmics institucionalitzats.

Raymond L. Wilder afirmà, fa ja cinquanta anys, que mirar les matemàtiques des d'una perspectiva cultural no era una cosa nova i que *"els antropòlegs ho han fet això, però atès que els seus coneixements matemàtics són, en general, prou limitats, els seus comentaris s'han reduït a assenyalar els tipus d'aritmètica trobada en cultures primitives"*. Això ens porta a una definició del que són les Etnomatemàtiques: *"Les Etnomatemàtiques es poden definir com a l'antropologia cultural de les Matemàtiques i de l'educació matemàtica"* (Gerdes, 1996).

Des del punt de vista tradicional i, a més, dominant, sempre s'ha considerat les Matemàtiques una disciplina desenvolupada al marge de les cultures, amb un caràcter alhora especial i universal, des del nostre punt de vista, un caràcter els plantejaments de la qual són els mateixos a Barcelona que a Singapur, a l'illa de Tonga o al Sahel. El colonialisme s'ha encarregat de transmetre i difondre aquesta opinió per tot arreu.

Que les Matemàtiques pugui admetre un tractament diferent segons qui la desenvolupa és una qüestió directament relacionada en la antiga dicotomia de si les Matemàtiques són descobertes per l'ésser humà o una invenció seva. L. White (Gerdes, 1996) afirmà que les Matemàtiques són part de la cultura humana i que les veritats matemàtiques es descobreixen i són producte de la ment de l'espècie humana, però alhora són trobades o descobertes per cada individu en la cultura matemàtica en la que creix. Per a White, les Matemàtiques no s'originaren a l'antic Egipte o Mesopotàmia, sinó que constitueixen un desenvolupament del pensament que comença amb l'origen de l'home i la cultura fa un milió d'anys.

Durant la dècada dels setanta començà una reflexió sobre el lloc que han de ocupar les matemàtiques a la societat alhora que es començaren a plantejar qüestions referents al paper que ha de jugar la recerca en educació matemàtica i les implicacions d'aquesta en el currículum i el seu desenvolupament, a l'ensenyament i a l'aprenentatge.

El 1990, Ubiratan D'Ambrosio, matemàtic i educador matemàtic brasiler, proposà un programa etnomatemàtic com a metodologia per a rastrejar i analitzar els processos de generació, transmissió, difusió i institucionalització del coneixement matemàtic en diversos sistemes culturals. Es tractava de contrastar les matemàtiques acadèmiques, les ensenyades i apreses a l'escola, amb les etnomatemàtiques, que ell descrivia com les matemàtiques practicades per grups identificables, com ara societats tribals o nacionals, grups de treball, grups infantils de certes edats, grups de professionals, etc. Unes Matemàtiques que es troben implícites però glaçades en un seguit d'activitats quotidianes que es realitzen en aquests pobles. D'Ambrosio encunyà el terme *Etnomatemàtiques* per a descriure les pràctiques matemàtiques d'aquests grups culturals. Aquells qui es dediquen a aquesta disciplina es poden definir doncs com a etnomatemàtics i la seva tasca estaria caracteritzada pels trets següents:

- Adoptar una concepció àmplia de les Matemàtiques que inclogués els universals d'Alan Bishop (1988): comptar, localitzar, mesurar, dissenyar, jugar i explicar.
- Emfasitzar i analitzar la influència de factors socioculturals en l'ensenyament, l'aprenentatge i el desenvolupament de les Matemàtiques i considerar els mètodes i certes matemàtiques com a producte cultural particular que cada cultura desenvolupa.
- Considerar les Matemàtiques com a una activitat universal de desenvolupament no unil·lineal, sinó que obeeix a certes circumstàncies: econòmiques, socials, culturals, etc.
- Les Matemàtiques dels currículums implantats fora del món occidental són en gran part alienes a les tradicions culturals del món no occidental i conseqüència del colonialisme. Cal buscar els elements culturals que hagin sobreviscut a la colonització i que posin de manifest el pensament matemàtic. Això significa cercar i documentar activitats quotidianes que allotgin o traspuïn Matemàtiques i tractar d'incorporar-les al currículum.

7. Activitats que necessiten i allotgen Matemàtiques de forma més o menys palesa.

Els grups d'activitats humanes observables en cultures tradicionals i no tant tradicionals que poden allotjar alguna forma de fer Matemàtiques són:

1. Llenguatge verbal, escrit i simbòlic (s'inclouen els mètodes pràctics de càlcul, com ara el càlcul mental i el gestual).
2. Activitats artesanals (gravats en fusta, confecció de teixits, construcció d'estris d'ús quotidià, etc.)
3. Jocs d'atzar i passatemps (en relació a les regles que regeixen un joc determinat, les apostes relacionades i els instruments necessaris per a jugar-hi).
4. Arquitectura tradicional i no tant tradicional (construcció de cases, graners, ponts, etc.)
5. Economia local (mètodes i tècniques de documentació, classificació de deutes i despeses, etc.)
6. Unitats de mesura (longitud, volum, pes, capacitat, etc.)
7. Mesura del temps i calendaris.
8. Sistemes d'optimització de tota mena de treballs (nombre de persones encarregades de dur a terme les tasques i ordenació sistemàtica en la seva execució)
9. Activitats agrícoles (limitació de propietats o terrenys, estris de tasques agrícoles, etc.)
10. Misticisme numèric i/o geomètric.
11. Sistemes reguladors d'heretatsges i dots.
12. Sistemes de relació i parentiu.

8. Etnomatemàtiques introculturals

Donant un cop d'ull al nostre voltant ens adonarem de què moltes de les activitats esmentades a l'apartat anterior han format i encara ara formen part del nostre entorn. Això ens ha d'ajudar a comprendre que les Etnomatemàtiques no són una disciplina exclusivament relacionada o creada per als pobles i cultures del Tercer

Món, sinó que és perfectament aplicable i necessària al Món Occidental, a cultures europees, a Espanya, a Catalunya. Encara romanen al nostre país moltes qüestions d'àmbit cultural matemàtic per a estudiar.

Per exemple, les rodes dels carros que he observat a l'illa de Mallorca tenen 14 radis, o sia, 7 diàmetres. Francesc de B. Moll (1983), acompanya el mot *carro* d'il·lustracions. Totes elles són de carros amb 14 radis: el carro de pagès (Cerdanya), el de bous (Pla d'Urgell), el d'escala (Catalunya i València) i el carro envelat en dia de festa (Mallorca). Des d'una visió geomètrica, això estaria relacionat amb la inscripció al cercle d'un polígon de set costats. Com s'ho fan o feien els fusters per posar adequadament els 14 radis? Per què han triat construir una roda semblant si amb 12 radis la construcció, almenys des d'un punt de vista geomètric resultaria molt més senzilla? Té res a veure això amb l'aproximació arquimèdica racional de $p: 22/7$? I en qualsevol cas, qui, on i com va transmetre aquest coneixement a l'artesà que fabricà la roda? Aquest nombre de radis és un universal que comparteixen els carros d'altres indrets?

Que l'interès i la necessitat per les Etnomatemàtiques creix cada cop més es posa de manifest en el fet que el I Congrés Internacional d'Etnomatemàtiques se celebrà a Granada durant el mes de setembre de 1998. La seva continuació serà el II Congrés Internacional d'Etnomatemàtiques que se celebrarà a Ouro Preto, Brasil, del 4 al 7 d'agost de l'any vinent. Encara hi ets a temps!

BIBLIOGRAFIA

Ascher, M. and Ascher, R.: *The code of the Quipu: A study in Media, Mathematics and Culture*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1981.

Ascher, Marcia: *Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Co., 1991.

Bishop, Alan: *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Editorial Paidós. Barcelona 1999. Versió castellana de l'original en anglès del 1988.

D'Ambrosio, Ubiratan: *Etnomatemática: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*. Editora Ática. Sao Paulo 1990.

Gerdes, Paulus: *African Pythagoras. A study in Culture and Mathematics*. Instituto Superior Pedagógico. Moçambique, 1994.

Gerdes, Paulus: "Ethnomathematics and Mathematics Education". A. J. Bishop et al. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 909-943. Kluwer Academic Publishers 1996.

Ifrah, George: *Las cifras. Historia de una gran invención*. Alianza Editorial. Madrid 1987.

Ifrah, George: *Historia universal de las cifras. La inteligencia de la Humanidad contada por los números y el cálculo*. Editorial Espasa-Calpe. Madrid 1997.

Moll, Francesc de B.: *Diccionari català-valencià-balear*. Editorial Moll. Palma de Mallorca 1983.

Washburn, Dorothy K. i Crowe, Donald W.: *Symmetries of culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*. University of Washington Press. Seattle 1988.

Zalavsky, Claudia: *Africa counts: Number and Pattern and African Culture*. Brooklyn, NY: Lawrence Hill Press, 1973.

Adreces web

- International Study Group on Ethnomathematics (ISGEm):
<http://www.rpi.edu/~eglash/isgem.htm>
- Per a navegar etnomatemàticament arreu del món:
<http://www.rpi.edu/~eglash/isgem.dir/links.htm>
- Directori de fonts sobre Etnomatemàtiques:
<http://www.academicinfo.net/mathethno.html>
- Pàgina web del II Congrés Internacional d'Etnomatemàtiques que se celebrarà a la ciutat d'Ouro Preto, al Brasil, del 4 al 7 d'Agost de l'any 2002:
<http://www.ii-ciem.ufop.br/>

Agraïments

Vull expressar la meva sincera gratitud a tots aquells qui, mercès a la seva hospitalitat i amabilitat, facilitaren les meves observacions sobre el terreny: Martheen, Leo, Yobel, Sever,

Sampe, Tiku, Rombe, Sarji i Sedani. Un agraïment acaronat per na Pilar, companya en la certesa i en l'atzar. Especial reconeixement mereix en Rasyid, informador i intèrpret, però sobretot, i molt abans, amic.



Treball de matemàtiques en una aula amb diversitat cultural

Antònia Dolcet Segura¹
Juanjo Cárdenas Ballesterero

CEIP Font de l'Alba

Introducció

- La creixent situació multicultural de les aules

Ens estem trobant cada dia amb una creixent realitat multicultural a la que no sabem, o no podem, extreure tot el potencial educatiu que ens pot aportar.

L'arribada d'alumnes procedents d'altres països ens ha de fer canviar alguns objectius per tal d'integrar a aquesta població multicultural i buscar noves propostes metodològiques que ens permetin elaborar projectes cooperatius i integradors que ens ajudin a aconseguir les competències bàsiques.

És evident que encara no hi ha una base suficient de treball que permeti adequar les aules a aquesta realitat i donar punts de referència culturals més enllà dels de la nostra cultura. És per això que als mestres encara ens costa adaptar-nos a la nova realitat multicultural.

Les diferents investigacions que s'han fet arreu estudien alguns aspectes diferencials com són: la relació percentual entre la cultura majoritària i minoritària, la pràctica integradora de Catalunya, el tipus d'immigració i els seus motius, i el nou sistema educatiu obligatori fins els 16 anys.

- Què hem fet fins ara?

Fins ara als alumnes d'incorporació tardana que ens arriben a Primària, se'ls integra a la dinàmica de l'escola partint del supòsit que l'ús de la llengua d'aprenentatge és la base fonamental que els farà, en un determinat temps, integrar-se a les activitats normals de l'aula. No dubtem que el coneixement de l'idioma és molt important, però sovint oblidem el bagatge, escolar i no escolar, amb el que els alumnes ens arriben.

L'experiència ens ha demostrat que un alumne triga, per terme mig de, 4 a 6 mesos a dominar el català, o el castellà, suficientment com per explicar quins coneixements curriculars porten del seu país. Malauradament però, en aquests mesos hem desenvolupat un seguit d'activitats, moltes vegades mal planificades, que han fet no tant sols que el nen hagi oblidat els aprenentatges previs que portava del seu país, sinó que fins i tot els rebutja en un intent de no sentir-se diferent.

Ens hem trobat, especialment en l'àrea de matemàtiques, que alguns mestres parteixen de zero amb els alumnes d'incorporació tardana i els fan fer càlculs propis de cursos inferiors, sense tenir en compte que potser el desconeixement dels algorismes, per exemple, pot ser causat pel fet que en el seu país d'origen es fan de forma diferent.

D'aquesta manera l'escola pot tenir alumnes de 10 i 11 anys fent sumes i restes durant els primers mesos de la seva incorporació a l'escola i desaprofitant un temps que després és molt difícil recuperar.

Creiem que hem de trobar estratègies que ens permetin crear pautes per a la identificació dels coneixements previs a l'àrea de matemàtiques, no tan sols des del punt de vista de la cultura majoritària al centre, sinó des de la integració de les diferències produïdes per la procedència dels alumnes.

1. Revisió de les estratègies d'aprenentatge de les matemàtiques a Primària

La creixent immigració que s'està produint, sobretot provinent del nord d'Àfrica i sud-Amèrica, ens ha de fer abordar el fet educatiu utilitzant paràmetres que fins ara no s'estan

(1) adolcet@pie.xtec.es / jcardena@pie.xtec.es

tenint en compte, és a dir, **considerar les matemàtiques com un producte cultural** íntimament lligat a la cultura i al fet social (Vilella, 1998). Quan gestionem de forma adequada les diferències, que de forma latent hi són en tots els grups socials, i es fan presents a l'aula, arriben a ser font de riquesa, fan aparèixer nous punts de vista i enfocaments pedagògics que promouen una revisió de les estratègies d'aprenentatge de les matemàtiques tenint en compte el fet multicultural.

Buscar estratègies que ens permetin treballar amb les màximes garanties d'èxit i afrontar el fet de la diversitat cultural tant en les aules de primària com en les de secundària des de la matemàtica, aprofitant el bagatge cultural de cada un dels nostres alumnes i posar de manifest, per exemple, els diferents mètodes que poden tenir aquests alumnes per a calcular, planificar i solucionar cada un dels problemes que se'ls hi planteja és, sens dubte, un dels nostres objectius.

1.1. Fonaments pel treball en una aula amb diversitat cultural a Primària

La multiculturalitat a les nostres aules és un fet que exigeix posar-nos a la recerca de d'un currículum integrador i d'un model metodològic adequat per a tothom.

Aquesta realitat ha posat de manifest, de moment, la falta d'adequació del nostre sistema educatiu i en particular de l'ensenyament de les matemàtiques, de tal manera que **hem d'anar a buscar altres solucions curriculars i models metodològics que tinguin en consideració la cultura de l'alumnat, i que afavoreixin el procés enculturalitzador a l'aula de matemàtiques des de la incorporació dels alumnes a l'escola.**

Els alumnes immigrants que trobem a les nostres aules estan en un punt d'interrelació de la seva cultura amb la que els acull que no és uniforme i que no els permet construir adequadament la seva identitat ni psicològica ni social.

Qualsevol projecte educatiu ha de tenir en compte aquesta situació i ha d'utilitzar i valorar els coneixements matemàtics no escolars, els valors, les creences i les expectatives dels alumnes tant com els possibles coneixements

matemàtics que hagin après a l'escola al seu país d'origen.

Com a conseqüència creiem que s'ha de partir de la base que l'aprenentatge matemàtic desenvolupa en un context en el que no domina la cultura de l'ètnia majoritària (no etnocèntrica), afavoreix el respecte entre elles i amplia la comprensió del fet que el coneixement matemàtic és un producte cultural.

1.2. La universalitat de les matemàtiques en un entorn de diversitat cultural.

No fa gaire es pensava que les matemàtiques eren tan universals que eren independents del seu entorn cultural, però els estudis que s'estan realitzant des de mitjans dels anys 80 estan demostrant que això no és així.

Tots els grups culturals desenvolupen matemàtiques, i quan alumnes que pertanyen a cultures minoritàries estudien a l'escola primària, en interrelació amb la cultura majoritària, aporten cada una de les tècniques adquirides en la seva cultura.

Segons Bishop (1991) hi ha sis habilitats que posen de manifest aspectes rellevants de l'entorn cultural en el que es desenvolupen cada una d'elles: **Comptar**, Des d'un punt de vista cognitiu estimula la classificació i la cerca de pautes. **Localitzar**, que facilita la relació entre l'home i el seu entorn. **Mesurar** és una habilitat reconeguda per totes les cultures, que donen valor segons l'entorn local més proper. **Dissenyar**, que ens possibilita investigar les formes, figures i les pautes de l'entorn, arribant a crear estructures ens permeten construir altres objectes. **Jugar**, i els jocs com a modelització de la realitat ens obliguen a seguir una sèrie de regles i a practicar tècniques de predicció, estimació... **Explicar** és una habilitat que ajuda a estructurar els llenguatges i explicar els fenòmens mitjançant un discurs propi.

És evident que la ideologia en la que es desenvolupa cada cultura fa que la visió del món i la manera d'explicar-lo sigui, per a nosaltres, un coneixement fonamental per adonar-nos de la importància de tenir la ment oberta a les explicacions que dels mateixos fenòmens donen alumnes de cultures diferents.

1.3. Matemàtiques per a tots. L'equitat en les matemàtiques

Sovint ens trobem en la contradicció que molts dels estudiants que fracassen en els seus estudis, han demostrat la seva capacitat per resoldre problemes matemàtics de forma creativa, tot i que no sempre segueixen els patrons de resolució marcats des de l'escola.

Diu Clements (2000) que està comprovat que en molts països l'educació matemàtica no contribueix a què els nens adquireixin les habilitats matemàtiques que necessiten en el moment actual o en el futur per sobreviure amb dignitat en el seu entorn immediat i en entorns més amplis.

Quan el que mou als professors i a l'escola són els resultats de proves externes al centre, fàcilment s'ignora la situació dels alumnes que tenen més dificultat per aconseguir els resultats que especifica el currículum.

Segons Clements (2000) hi ha quatre factors que tot i que sempre hi són presents sovint no es tenen en compte: **el currículum, els continguts, la llengua, els exàmens.**

1.4. Quines matemàtiques s'han d'ensenyar?

La realitat amb la que ens trobem els centres que assumim la diversitat cultural com un fet irreversible i enriquidor, és un repte a partir del qual s'assentaran els pilars de la integració social de les cultures, que a causa de flux migratori, estem rebent els últims anys als centres públics.

Conèixer, encara que sigui mínimament, quines són les activitats que sustenten cada una d'aquestes habilitats comuns a totes les cultures, ajudaria en la pràctica educativa tant als professors com als alumnes i permetria millorar la nostra feina a partir del desenvolupament d'estratègies que fessin que les activitats matemàtiques formulades a partir de contextos trobats fora de l'aula fossin significatives i rellevants pels alumnes.

A més a més els alumnes treballen millor a partir de projectes que els siguin propers, desenvolupen estratègies pel treball en equip, aprenen a planificar, a escoltar les idees dels altres,

a cercar recursos i oferir-los a la resta, a analitzar els resultats obtinguts i exposar-los. Amb el desenvolupament d'aquestes activitats, els alumnes no aprenen únicament habilitats i conceptes sinó que tenen l'oportunitat d'intercanviar idees i valors no estrictament en l'àmbit de la matemàtica sinó en la seva relació personal.

1.5. Com s'aprèn en una aula de matemàtiques multicultural

Quan un grup d'alumnes està solucionant problemes matemàtics en una aula multicultural necessiten aprendre a identificar, respectar i valorar les diferents alternatives de resolució, així com les aproximacions úniques que en funció del seu context cultural cada alumne pot aportar per arribar a la solució (Orey, 1991).

1.6. La llengua d'aprenentatge en una aula de matemàtiques multicultural

Des d'un punt de vista estrictament basat en l'atenció a la diversitat podem considerar l'aula com un espai de comunicació ja que el llenguatge és el que permet construir i reestructurar el coneixement.

Moltes vegades presentem les activitats a classe fent servir un vocabulari limitat, intentant d'aquesta manera ajudar en la comprensió de l'enunciat. Els termes que utilitzem es converteixen en paraules clau que ajuden a saber quina operació s'ha de fer per resoldre el problema.

No pensem que el que estem fent és crear enunciats artificials amb un vocabulari que no prové de l'experiència dels alumnes i que en lloc d'ajudar fins i tot podem perjudicar als alumnes que no dominen adequadament la llengua. De vegades una mateixa paraula pot aparèixer com a indicatiu verbal i d'altres com a distractor, de manera que els alumnes al no fixar-se en el context del problema difícilment poden garantir una solució correcta.

Davant de totes aquestes dificultats lingüístiques ens hem d'adonar que la comunicació en la classe de matemàtiques es produeix en un estil de llenguatge mixt. Quan els alumnes discuteixen entre ells sobre arguments vàlids en matemàtiques barregen el llenguatge natural i

el matemàtic creant un meta-llenguatge amb el que expliquen les seves estratègies i estan desenvolupant aprenentatge matemàtic (Nesher, 2000).

1.7. Organització del treball en una aula multicultural

La feina del professor de matemàtiques, en una aula multicultural a primària, ha de tenir en compte els principis d'equitat, que els continguts siguin significatius per a tots els alumnes, que es minimitzi al màxim l'efecte de la llengua i que s'avalui tenint en compte l'equilibri entre les matemàtiques que fem servir a l'aula i les exigències de l'entorn.

1.8. L'avaluació com a procés de reforma en una aula de matemàtiques multicultural

L'experiència ens diu que tot i que els nostres alumnes són capaços de resoldre problemes en una situació de classe i en treball de grup petit o gran, no rendeixen de la mateixa manera davant d'un control o d'un examen individual. Que significa això, que no han assolit els conceptes matemàtics o més aviat que no són encara capaços de comunicar correctament el que han après?

Possiblement l'avaluació a les nostres aules multiculturals ha de tenir una naturalesa diferent. Fins i tot és possible que sigui necessari començar una reforma encaminada a trobar un equilibri entre la utilització de les matemàtiques a l'aula i les exigències socials.

2. Propostes per a l'aula

Després de l'anàlisi de les investigacions que fonamenten el treball en una aula amb diversitat cultural s'han elaborat algunes propostes, que van des de quina mena de problemes provoquen un aprenentatge ric i aprofitable en una aula de matemàtiques multicultural fins al paper del mestre en la resolució de problemes.

2.1. Treball per projectes

En una aula de matemàtiques multicultural és necessari crear un entorn de treball per projectes que ens permeti trobar activitats que relacionin les matemàtiques amb la societat.

Per crear aquest entorn de treball per projectes necessitem establir una sèrie de connexions entre el nivell de coneixements conceptuals que tenen els alumnes i les situacions contextuais que vulguem explicar (Bishop, 1988).

El paper del mestre és de mediador entre els coneixements adquirits pels alumnes fora de l'escola i els que reben a l'aula.

En un altre context pedagògic, Bolt i Hobbs (1991) es plantegen el treball per projectes com a conseqüència dels resultats dels informes relatius a l'ensenyament de les matemàtiques al Regne Unit on es van posar de manifest les insuficiències d'una instrucció matemàtica basada en tècniques aïllades.

Les activitats que suggereixen han de ser reformulades de forma significativa per a que les puguem aprofitar i aplicar en les nostres aules multiculturals a primària. Un cop adaptades al nostre context tindrien les següents característiques:

- Activitats que estimulin l'esperit d'indagació.
- Activitats que permetin desenvolupar una gran varietat d'estratègies i destreses.
- Activitats amb problemes adaptats a l'entorn on s'hagi de recollir informació i fer deduccions.
- Activitats on hi hagi situacions susceptibles de ser investigades i que permetin utilitzar estratègies que ens portin a la recerca de pautes.
- Activitats on el propi interès de l'alumne generi una investigació.

És fonamental que després de realitzats els projectes proposats els alumnes tinguin un espai per poder comunicar els seus resultats i puguin desenvolupar la seva capacitat per descriure mitjançant paraules, gràfiques, diagrames..., els resultats dels seus projectes.

2.2. Investigacions

En el treball a l'aula, afavorir un entorn de treball per a investigacions pot ser molt ric i ajudar en gran mesura a la comprensió del desenvolupament de les idees matemàtiques, sobre-

tot si l'objectiu principal del mestre és construir un comportament matemàtic creatiu, fent servir, com a font principal del potencial, el mateix alumne.

2.3. Resolució de problemes

Fins ara hem vist quina és la importància de l'entorn per a la resolució de problemes, veiem ara quines són les activitats que es consideren més apropiades al voltant del plantejament i resolució de problemes.

Hi ha diverses propostes de treball que poden ser significatives en un entorn multicultural. D'una banda parlem de **situacions nucli** on es treballen aquelles situacions en les que a partir de les primeres resolucions apareixen, de forma natural, altres problemes o generalitzacions. D'una altra la intervenció en la **selecció d'activitats** permet que els alumnes es sentin tant involucrats en la feina que les solucions que troben les identifiquin com a pròpies. En una aula multicultural aquest és un factor de cohesió dels grups i ajuda a què les distàncies culturals que hi puguin haver s'apropin fins al punt de no ser determinant treballar amb uns o altres companys. A més a més **treballar a partir del context** socio-cultural permet estructurar el pensament i l'aprenentatge, explorant de quina forma determinades eines culturals medien la cognició i faciliten l'aprenentatge

3. Paper del professor en una aula de matemàtiques multicultural

Qualsevol que sigui la proposta que hem escollit per treballar en una aula amb diversitat cultural, i tal com proposa Bishop (1988), hi ha uns principis que poden determinar si el procés d'enculturació matemàtica que es dona entre el professor i els seus alumnes està tenint èxit:

El mestre ha de poder influir i saber utilitzar aquesta influència sense abusar-ne.

El mestre ha d'influir per aconseguir una participació constructiva i de cooperació dels alumnes en el seu aprenentatge.

El mestre i els seus alumnes han de tenir clar que creen junts l'entorn d'aprenentatge. Estem parlant d'una col·laboració constructiva i coo-

peradora en la que ha d'intervenir tot el grup classe.

El mestre ha de dirigir els seus esforços cap a la creació, començament, i manteniment de les activitats i de l'entorn de treball que faci que els alumnes participin en activitats matemàtiques significatives.

La influència del mestre no ha d'acabar per imposar als seus alumnes els seus coneixements matemàtics sinó que ha d'adoptar una postura general de col·laboració. És possible que el mestre s'hagi de convertir en líder matemàtic del grup i això requereix que el mestre tingui empatia i s'identifiqui amb els membres de la classe (Bishop, 1988).

4. Les nostres escoles

Després de considerar les investigacions en Etnomatemàtiques a partir de les quals hem desenvolupat algunes propostes de treball, veiem que els alumnes immigrants que trobem a les nostres aules estan en un punt d'interrelació de la seva cultura amb la que els acull que no és uniforme i que difícilment els permet construir adequadament la seva identitat psicològica i social. Es per això que ens hem apropat a les escoles del nostre context on hi ha creixent població multicultural i hem volgut conèixer que és el que s'està fent.

4.1. Actuacions útils en una aula de matemàtiques multicultural

El desenvolupament d'un qüestionari¹ (Cárdenas, 2000) ens ha permès reconèixer una sèrie de patrons, tant en la tipologia multicultural que hi ha en les nostres aules de primària com en les actuacions que haurien de fer els professors. L'experiència d'aquests ens mostra que els mestres han desenvolupat mecanismes que fan més eficaç la seva tasca docent davant del repte que suposa l'educació en centres on hi ha percentatges alts d'alumnes immigrants.

Aquestes actuacions no s'han de considerar literalment i creure que engloben el conjunt de totes les situacions que poden generar-se en una aula multicultural a primària.

Creiem però, que situades en el seu context adequat, permetran als professors de primària desenvolupar estratègies d'èxit a l'aula de matemàtiques en un context de diversitat cultural.

Desenvolupem set categories que ens permetran tenir una panoràmica de quines són les actuacions que permeten planificar les activitats de classe i aconseguir aprenentatge matemàtic significatiu i útil pels nostres alumnes. Com és evident per qüestions d'espai no hem inclòs les més de 50 actuacions recomanades per Cárdenas (2000), si no les categories en les que es desenvolupen cadascuna de les diferents actuacions.

1. Reconèixer la situació multicultural.
2. Conèixer les característiques de la multiculturalitat que es té.
3. Conèixer com es gestiona l'activitat en una aula multicultural.
4. Determinar sobre quins continguts s'han de treballar els objectius en funció de les característiques multiculturals de l'aula.
 - Des del punt de vista del disseny curricular.
 - Des del punt de vista del professor.
 - Des del punt de vista del centre educatiu.
5. Com es desenvolupa l'activitat en una aula multicultural.
6. Com s'avaluen els aprenentatges en una aula multicultural.
7. Com es regula el procés d'integració del alumnes en la societat catalana.

Creiem oportú destacar que el fet de tractar l'àrea de matemàtiques com un producte cultural, i especialment a l'Educació Primària, pot facilitar als mestres que es troben en aquests nivells l'adequació del currículum a la seva realitat educativa.

Hem de ser conscients que a l'Educació Primària el mestre imparteix diverses àrees

dels currículum, que està força estona amb els seus alumnes i els pot arribar a conèixer molt bé. Necessita eines que l'ajudin a comprendre millor aquells aspectes singulars dels alumnes procedents d'altres cultures.

L'atenció a la diversitat cultural comporta considerar què pot aportar cada alumne al conjunt per construir l'aprenentatge, que al final serà més ric que si intentem fer que tots els alumnes assumeixen la cultura majoritària. Tenim com exemple clar, a Catalunya, l'experiència que ens aporta la immigració produïda als anys 50 i 60 de famílies procedents d'Andalusia i de la resta de l'Estat que no tant sols s'han integrat a les formes culturals catalanes sinó que han aportat tradicions de la seva pròpia cultura que s'han recollit i ara formen part de la nostra forma de viure.

4.2. Gestió d'aula

Després de tres cursos treballant la gestió en una aula amb diversitat cultural, i seguint les actuacions proposades per Cárdenas (2000), creiem que podem determinar quines situacions i quins elements ajuden a millorar la gestió de la classe de matemàtiques en una aula amb diversitat cultural.

A l'aula s'ha de posar de manifest tot allò que esperem d'ells i tot allò que ells han d'esperar de nosaltres. Per a cada grup és diferent, però ens ajuda a centrar el treball. Són les normes d'actuació davant el procés de realització de la feina.

Treballem en situacions de petit grup en les que els alumnes produeixen aprenentatge i s'observa clarament que l'actitud que mostren és tolerant, és integradora, que és produeix intercanvi d'informació i que de forma natural, a partir de la resolució de les activitats, apareixen nous problemes que ens permeten aprofundir en aspectes matemàtics més a prop de l'interès de l'alumne.

A mida que es treballa hi ha una evolució en el paper que cada un dels membres del grup va assumint en funció de tres paràmetres:

(1) CARDENAS, J. (2000): Diversitat cultural a primària en el marc del nou Sistema Educatiu: Pautas d'actuació a l'aula de matemàtiques pel desenvolupament d'estratègies d'èxit. Departament d'Ensenyament. <http://www.xtec.es/sgfp/lli-cencies/200001/resums/jjcardenas.htm>

- Interès per l'activitat
- Coneixements previs al voltant de l'activitat
- Relació amb els membres del grup de treball

El temps que els membres d'un grup triguen en posar-se d'acord i planificar la resolució dels problemes va disminuint. El treball en equip els ha proporcionat un aprenentatge especialment dirigit a minimitzar el temps de reacció assumint determinats rols dintre de l'activitat.

Hem observat que el paper que exerceixen és diferent segons l'activitat o els companys de grup i especialment segons l'experiència personal útil que puguin aportar per solucionar el problema.

El fet de conèixer situacions viscudes pels alumnes i que puguin fer referència al context cultural ens apropa a solucions reals que generen generalitzacions aprofitables per treballar els continguts programats.

- Paper del mestre en la dinamització de l'activitat

Les intervencions del mestre van dirigides no només a produir aprenentatge sinó a descobrir quina és la interpretació que l'alumne fa dels objectes matemàtics que l'envolten. La interacció que fan dos alumnes de contextos culturals diferents quan treballen junts una activitat genera una riquesa de matisos que milloren l'aprenentatge.

Els alumnes estan més predisposats a donar i rebre informació, són més tolerants i ajuden als que tenen dificultats per resoldre les activitats.

- Aprenentatge dels alumnes

L'actitud dels alumnes es dirigeix ràpidament a la resolució de les activitats i els problemes. Tot i que el nivell acadèmic pugui ser deficitari totes les activitats se solucionen. Els alumnes van desenvolupant les estratègies que ens planifiquem i aconseguen millorar les habilitats i tècniques de numeració i càlcul programades. Però on realment s'observa progrés és en la capacitat d'assumir la responsabilitat del seu propi aprenentatge, fent servir els coneixements adquirits i compartint-los amb els altres.

- Gestió de grups

La gestió dels grups en una aula multicultural determina els aprenentatges que el mestre vol que els seus alumnes reconeguin com a prioritaris.

Al llarg del curs el busquem agrupacions en les que la diversitat d'experiències, dintre i fora de l'aula, permeti enfocar la solució de les activitats de formes diferents.

Al petit grup li donem recursos variats, temps per reflexionar, temps per aprendre a escoltar els altres i a argumentar les idees pròpies, i sobretot independència per planificar la resolució dels problemes.

Proporcionem espais de reflexió i debat, que ens permet que cada grup pugui comunicar els resultats de la seva feina als companys per tal que sigui avaluada i contrastada amb els resultats propis.

- Característiques dels problemes que fem servir

Normalment tenim els problemes dels quaderns de treball i els problemes dels llibres de text, aquest tenen problemes interessants i útils per l'aprenentatge de conceptes i d'estratègies. Malauradament pels nostres alumnes, la majoria dels problemes que presenten aquest llibre i quaderns tenen poc interès, no s'adapten a la seva experiència més propera i treballen amb elements de la realitat que difícilment tindran properament al seu abast.

La feina del mestre en aquest sentit està encaminada a trobar:

- problemes susceptibles de ser transformats i adaptats al context en el que es mouen els alumnes.
- problemes amb un lligam a feines o activitats en les que es mouen les famílies dels alumnes
- problemes descontextualitzats i aplicables a qualsevol situació cultural

Els problemes que hem utilitzat compleixen aquestes característiques, de tal manera que moltes vegades generen situacions que ens permeten conèixer millor l'entorn més proper del nen: professió dels pares, gestió de l'economia familiar, us d'eines,...

• L'entorn de resolució de problemes

La gestió de classe en petits grups de treball, que inicialment es va plantejar únicament per a les activitats de resolució de problemes, s'ha imposat a la resta de les activitats de la classe de matemàtiques i fins i tot s'ha estès a altres àrees i altres mestres.

La resolució de problemes, a partir del treball de grup, ens ha permès garantir una sèrie d'aprenentatges matemàtics que en un context de classe tradicional no s'haguessin donat amb aquest tipus d'alumnes.

En definitiva la gestió de classe no tan sols els ha permès aprendre conceptes matemàtics, sinó desenvolupar una forma de treballar que els ha facilitat altres aprenentatges sobre la manera de fer, la manera d'abordar les activitats i la manera de comunicar el que han après.

• Activitats de treball a l'aula.

Durant la durada de les sessions hem anat variant el tipus d'activitats que s'han realitzat en funció de la tipologia del problema, dels coneixements previs dels alumnes i de l'interès que suscitava. De totes maneres en cada un dels problemes hem intentat que apareguessin unes determinades activitats per tal de sistematitzar el seu ús en el context de resolució de problemes.

- Analitzar la informació
- Manipular les dades
- Contrastar el progrés en la resolució
- Debatre i posar en comú els resultats

Per realitzar aquestes activitats de caràcter general hem planificat altres més específiques que ens ajudaven a aconseguir la sistematització en l'aprenentatge: **activitats de caràcter verbal, activitats plàstiques, activitats de petit grup.**

La gestió d'aquestes activitats ens permet que els alumnes vagin adquirint de forma sistemàtica formes d'abordar els problemes que faciliten la seva resolució, i que es formalitzin les relacions entre els membres del grup, per tal d'assumir el paper més adient en la resolució

dels problemes. Dotem als alumnes d'estratègies de treball en equip que fan possible que estiguin millor preparats per assimilar els aprenentatges a partir de la resolució dels problemes que es va produint.

Ja que els alumnes van desenvolupant les activitats i van resolent els problemes de forma autònoma el mestre pot dedicar el seu temps a facilitar situacions d'aprenentatge individual que incideixen directament en el treball de cada nen, millorant la comprensió, l'assimilació de conceptes i la pràctica d'habilitats bàsiques pel desenvolupament matemàtic escolar i contextualitzat.

• L'avaluació

L'avaluació s'ha anat produint a mida que s'han anat resolent els problemes, podem dir que la explicitació del procés que ha portat als alumnes a la solució d'aquests, és a la vegada activitat d'aprenentatge i d'avaluació. El fet que en uns problemes s'utilitzin conceptes i procediments de problemes solucionats anteriorment així ho demostra.

Nosaltres hem fomentat, a més a més, l'establiment de solucions matemàtiques aplicables al món real. Que es fessin servir eines de tipus cultural i la transmissió d'aprenentatge entre els membres del grup i entre uns grups i altres.

5. Valoracions

Després d'alguns anys de treball moltes coses han canviat en la percepció de la multiculturalitat que ens envolta. Tenim una perspectiva diferent del treball que s'ha de fer des de l'escola i especialment a l'aula de matemàtiques.

Creiem que hem pogut aprofundir en les causes que generen conflicte a l'aula i donar eines per minimitzar les dificultats que mestres dels centres públics es troben quan, dia a dia, van rebent alumnes immigrants.

Mostrem possibles actuacions que ajuden a millorar les nostres classes de matemàtiques, i a més afavoreixen la integració dels alumnes de les aules amb diversitat cultural a la societat i a la nostra cultura sense haver de renunciar a la pròpia.

Creiem que la diversitat cultural a primària s'ha d'abordar, des de l'aula de matemàtiques, a partir de la formació del professorat en aquests temes:

- Reconeixement de les matemàtiques com a producte cultural i dinàmic.
- Utilització del conjunt d'eines disponibles en cada una de les cultures que trobem a l'aula.
- La gestió de classe en grups petits que treballin fonamentalment a partir de la resolució de problemes.

6. Matemàtiques com a producte cultural

Els mestres dels centres de primària amb diversitat cultural, hem de rebre una formació complementària a la que ja tenim, que ens permeti aprofitar les eines matemàtiques que ens aporten aquests alumnes. La forma d'entendre el món, i d'interactuar amb ell. També hem d'aprofitar l'aprenentatge que fan en el procés d'integració de la seva cultura a la nostra.

S'ha d'estudiar l'aprofitament de les eines matemàtiques quan es troben dues o més cultures en interacció. Conèixer quines es desenvolupen més a Catalunya i aprofitar aquests coneixements per determinar els continguts més apropiats per produir aprenentatge significatiu en un context multicultural.

BIBLIOGRAFIA

BISHOP, A. J. (1999): *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

BOLT, B.; HOBBS, D. (1991): *"101 proyectos matemáticos"*. Barcelona: Labor.

CÁRDENAS, J. (2000): *"La diversitat a primària en el marc del nou sistema educatiu: identificació d'estratègies d'èxit en una aula de matemàtiques multicultural"*. Memòria de llicència d'estudis. Departament d'Ensenyament.

CLEMENTS, K. (2000): *"Matemáticas en la escuela: cuestiones de equidad y justicia"*. A N. Gorgorió i altres (Eds.), *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 57-75). Barcelona: Graó.

NESHER, P. (2000): *"Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático"*. A N. Gorgorió i altres (Eds.), *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva Internacional* (pp. 109-123). Barcelona: Graó.

OREY, D. (1991): *"Perspectivas etnomatemáticas en los Estándares del NCTM"*. ISGM (International Study Group in Ethnomathematics). Butlletí 1, v. 5.

VILELLA, X. (1998): *"Millorar l'atenció a la diversitat multicultural des de l'àrea de matemàtiques"*. Memòria de llicència d'estudis. Departament d'Ensenyament.

Recull bibliogràfic

Vicenç Font

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica de la UB.

vfont@d5.ub.es

Alsina, C.; Pérez, R.; Ruiz, C. (1989). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis

Alsina, C. (1993). *Del nº 0 al 99. Fem comptes amb els contes*. Barcelona: Graó.

Bishop, A.J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Blanco-Martin, M. F. (1994). *Movimientos y simetrías*. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Bujosa, J.M. (2001). Estadística i càlcul de probabilitats amb l'Excel. *Biaix* 19; 71-73.

Carraher, T. i altres (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. Madrid: Siglo XXI.

Civil, M. i altres (2000). La atención a la diversidad en la clase de matemáticas: hacia una participación pedagógica y matemática. *UNO-Revista de Didáctica de la Matemática*, 23: 29-42.

Corbalán, F. (1996). *Números, cultura y juegos: tu mundo y las matemáticas*. Madrid: Videocinco.

Coriat, M. (1997). Cultura, educación matemática y currículo. En L. Rico (ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (165-167). Madrid: Síntesis.

Coxeter, H. (1984) *Fundamentos de Geometría*. México: Limusa.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 23: 9-28.

Fernández, A. i Rico, L. (1992). *Prensa y educación matemática*. Madrid: Síntesis.

Ghyka, M. (1983). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: Poseidón, S.L.

Ghyka, M. (1992). *El número de oro*. Barcelona: Poseidón, S.L.

Gómez, I. M. (2001). Imaginari social de les matemàtiques. *Guix-Elements d'Acció Educativa*, 276-277: 65-73.

Gorgorió, N. i altres (2000). Cultura y educación matemática: Sugerencias para un cambio. *Cuadernos de Pedagogía*, 288: 72-75.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis

Lacasa, P. i altres (1999). ¿Se aprenden matemáticas haciendo los deberes? *Cultura y Educación*, 10: 89-100.

Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Barcelona: Paidós.

Martin, G.E. (1994). *Transformation Geometry*. Berlín: Springer-Verlag.

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Oliveras, M. L. (2000). Vivències i creences matemàtiques. *Perspectiva Escolar*, 242: 20-27.

Panofsky, E. (1999). *La perspectiva como forma simbólica*. Barcelona: Tusquets.

Pedoe, D. (1982). *La geometría en el arte*. Barcelona: Gustavo Gili.

Planas, N. (2001). L'aprenentatge matemàtic també és intercultural. *Guix-Elements d'Acció Educativa*, 280: 74-81.

- Planas, N. (2002). Enseñar matemáticas dando menos cosas por supuestas. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30: 114-124.
- Plasencia, I. i altres (1999). Kevin, un alumno visualizador. *Cultura y Educación*, 11: 23-28.
- Pérez, R. (1995). *La Alhambra*. Granada: Épsilon-SAEM Thales.
- Ramírez, A.; Usón, C. (2000). Los 17 grupos de simetría planos en el mudéjar aragonés. *Suma*, 33: 5-23.
- Reinthalder, J. (1990). *Mathematics and Music: Some Intersections*. Norman, OK: Mu Alpha Theta.
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía crítica de la educación matemática*. Bogotá: Una empresa docente.
- Tiburcio, S. (2002). Música y matemáticas. *Revista Elementos* (URL: <http://www.elementos.buap.mx/num44/htm/212.htm>).
- Van Hensbergen, G. (2001): *Antonio Gaudí*. Barcelona: Plaza y Janés
- Weyl, H. (1991) *Simetría*. Madrid: Mc.Graw-Hill
- Xenakis, I., *Formalized Music. Thought and Mathematics in Music*, Pendragon Revised Edition, 1992
- Zaá, M^a.D. (2002). *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. Madrid: Eos
-

Sobre els 'Principis i Standards per a les Matemàtiques Escolars'

Marta Civil i Virginia Horak,¹

Universitat d'Arizona

En aquest article, fem un breu repàs als 'Principis i Standards per a les Matemàtiques Escolars' desenvolupats l'any 2000 pel National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), la principal societat d'educadors matemàtics dels Estats Units. Comencem amb una ràpida mirada històrica que ens porta fins l'elaboració dels primers 'Standards per al Currículum i l'Avaluació de les Matemàtiques Escolars' (NCTM, 1989; traduït al castellà per l'Associació S.A.E.M Thales l'any 1992), juntament amb els llibres adjunts publicats posteriorment ('Standards Professionals per a l'Ensenyament de les Matemàtiques', NCTM, 1991; 'Standards d'Avaluació per a les Matemàtiques Escolars', NCTM, 1995). Entenem que un repàs a aquesta història recent és necessari per tal de comprendre el context de la publicació en la qual ens centrem i en quin sentit aquests nous 'Principis i Standards' són diferents dels llibres anteriors. Completelem el context històric amb fragments d'una entrevista al Dr. Stephen Willoughby, president de l'NCTM de 1982 a 1984 i, en aquests moments, professor de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat d'Arizona i membre destacat de la comunitat d'educadors matemàtics.

Amb la publicació dels 'Standards per al Currículum i l'Avaluació de les Matemàtiques Escolars' l'any 1989, l'NCTM va obrir les portes al debat, encara vigent, sobre la reforma de les matemàtiques escolars. Aquest debat va traspasar l'àmbit dels Estats Units i molt aviat es varen poder escoltar referències a aquesta publicació a diverses conferències internacio-

nals i significatius grups d'experts se'n preocuparen. Aquell document era relevant, no només per la visió de les matemàtiques escolars que plantejava des d'una perspectiva nord-americana, sinó també perquè establia 'standards' que permetien mesurar aspectes d'aquestes matemàtiques escolars. La creació del document tingué un fort impacte en les matemàtiques i en d'altres disciplines ja que, d'alguna manera, representava el consens dels educadors matemàtics i dels professionals de les ciències matemàtiques en relació a la direcció de les matemàtiques escolars. A l'apartat d'agraïments dels 'Standards per al Currículum i l'Avaluació de les Matemàtiques Escolars', s'assenyala que el document va ser escrit amb la intenció de guiar les matemàtiques escolars "al llarg de la propera dècada" (p. 6). Per tant, l'NCTM reconeixia que el document hauria de tenir una vida limitada i requerria d'una revisió en els següents anys.

Poc després, als 'Standards per al Currículum i l'Avaluació de les Matemàtiques Escolars' els van seguir dues altres publicacions de l'NCTM. El 1991 es publicaven els 'Standards Professionals per a l'Ensenyament de les Matemàtiques'. Aquest llibre descrivia quins havien de ser els components de fons d'un ensenyament efectiu que hauria de donar suport a la implementació de l'educació matemàtica tal com havia estat pensada en el document anterior. L'any 1995 arribava la publicació dels 'Standards d'Avaluació per a les Matemàtiques Escolars', que compilaven diversos criteris d'utilitat en la valoració de les pràctiques d'avaluació enteses en un sentit

(1) Traducció feta per Núria Planas

ampli, no només en un sentit d'avaluació per a la promoció per mitjà d'exàmens. Tots tres documents guiaren la visió reformista de l'NCTM respecte als principis que havien de guiar les matemàtiques escolars durant la dècada del noranta.

Amb la publicació dels *'Standards d'Avaluació per a les Matemàtiques Escolars'*, l'NCTM endegà l'anomenada Comissió sobre el Futur dels Standards. El grup d'experts que constituïa la Comissió treballà per tal de desenvolupar els recursos necessaris que haurien de permetre actualitzar els tres *Standards* existents i elaborar un document únic que, després de diverses revisions des del 1997, donaria lloc a la creació del projecte que en l'actualitat es coneix abreujadament com els *'Standards 2000'*. Per tal de dur a terme les successives revisions, es va demanar la col·laboració de molts grups de professionals vinculats al món de l'ensenyament de les matemàtiques. Entre els experts que aconsellaren modificacions en els primers documents, hi havia matemàtics professionals, professors d'universitat, mestres i professors de tots els nivells escolars, formadors de mestres, investigadors en educació matemàtica, responsables de política educativa i elaboradors de currículum. Un primer esborrany del nou document, completat l'octubre de 1998, va ser fet públic i revisat per nombrosos grups i persones a títol individual tant en el seu format imprès com en l'electrònic. El llarg i detallat procés de revisió, amb tota la gent que s'aconseguí involucrar, prova els esforços de l'NCTM per a posar en conjunt les perspectives, els coneixements i les experiències de tots aquells interessats en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques. La nova aproximació al món de les matemàtiques escolars va ser revolucionària en aquell moment i, a més, es va poder comprovar l'efectivitat del model de treball. La demanda de la comunitat educativa per a què el projecte continués refinant aquesta aproximació fou contundent.

Finalment, l'any 2000, el nou document sorgit de totes les revisions realitzades a tots els documents anteriors, *'Principis i Standards per a les Matemàtiques Escolars'*, va ser publicat en paper imprès i editat en versió electrònica per mitjà d'un CD-ROM, a més de ser publicat a la pàgina web de l'NCTM. Aquest

document fou escrit amb el propòsit d'esdevenir un recurs que contribuís a fer avançar la comprensió del currículum, de l'ensenyament i l'avaluació de les matemàtiques escolars. En particular, s'hi descriu una visió de les matemàtiques escolars – un conjunt d'objectius vers els quals cal anar i un "futur en què tots els alumnes hauran de tenir accés a una instrucció matemàtica rigorosa i d'alta qualitat, incloent-hi quatre anys de matemàtiques escolars superiors" (NCTM 2000, An Overview, p. 1). El document pretén ser recurs i guia per a mestres i professors, especialistes en el currículum, educadors matemàtics i investigadors, així com tots aquells a qui els pertoca prendre decisions que influeixen l'educació matemàtica dels alumnes durant l'equivalent a l'escolarització obligatòria i el batxillerat.

Fet aquest ràpid repàs històric que ens ha permès contextualitzar la importància del tema que tractem, passem a compilar els Principis i els *'Standards'* dels quals s'ha parlat, fent referència naturalment a la darrera versió en què han estat formulats. Els deu *'Standards'* dels *'Principis i Standards per a les Matemàtiques Escolars'* descriuen la comprensió i les competències matemàtiques que haurien de configurar la formació curricular de tots els estudiants. Hi ha cinc *'Standards'* referits a continguts (nombres i operacions; àlgebra; geometria; mesura; anàlisi de dades i probabilitat) que assenyalen els continguts que s'haurien d'aprendre i cinc *'Standards'* referits a processos (resolució de problemes; raonaments i proves; comunicació; connexions; representació) que delimiten els camins que han de facilitar l'adquisició d'aquests continguts. La resta del document es dedica a una anàlisi detallada dels continguts i processos específics per a cadascuna de les etapes d'escolarització compreses entre parvulari i batxillerat. Tots aquests capítols, en especial els que tracten les etapes escolars per separat, han de servir de guia per a professors i equips docents alhora de crear un model comú en el propòsit de dissenyar un programa d'instrucció que proporcioni continuïtat i aprofundiment en els processos d'aprenentatge dels alumnes al llarg dels successius cursos escolars.

El document conclou amb un capítol molt interessant, titolat "Treballant junts per tal d'asso-

lir els objectius". Aquest capítol emfasitza la necessitat d'involucrar grups molt diversos per tal d'assolir els objectius plantejats pels Principis i pels 'Standards': grups de mestres i professors, d'estudiants, de càrrecs directius, de pares, matemàtics, polítics, d'elaboradors de currículum, d'empresaris i de representants de la comunitat. La complexitat d'assolir amb èxit uns continguts i principis tant exigents fa imprescindible que tots aquests grups treballin junts en la seva realització. El darrer capítol no és prescriptiu (de fet, en cap moment prescriure és la intenció del document); per contra, presenta diferents alternatives d'actuació i planteja qüestions que cadascun dels implicats haurà de resoldre per ell mateix. Per exemple, dins la secció dedicada a discutir com assolir el principi d'equitat, es planteja un debat entorn a la necessitat de treballar el currículum en la seva totalitat o, en canvi, tractar-ne només algunes parts en profunditat; pel que fa al mateix principi, també s'introdueix el debat entorn al treball en grups heterogenis versus grups homogenis. En tots els debats que es plantegen, el document evita prendre posicionaments, tot i que sempre deixa clar que, sigui quina sigui l'opció presa, l'educador ha de tenir el convenciment que està actuant de la manera que garanteix el màxim possible que tots els alumnes tinguin accés a una educació matemàtica de qualitat. En concret, es diu que: "s'haurien d'evitar aquelles estructures que exclouen certs grups d'alumnes i que dificulten l'accés a un programa d'educació matemàtica significatiu i basat en reptes assolibles" (p. 369).

Els 'Standards'

Hi ha 'Standards' de dos tipus: els relatius a continguts específics de matemàtiques i els relatius a processos. Els cinc 'Standards' relatius a continguts, recollits en els '*Standards 2000*', són:

- **Nombres i Operacions.** Aquest 'Standard' recull bona part dels continguts matemàtics del currículum d'Estats Units que han estat centrals durant anys en l'etapa que va des de parvulari fins al final de l'escolarització obligatòria i del batxillerat. El sentit numèric, nucli d'aquest 'Standard', és l'element que fonamenta la resta d'àrees de les matemàti-

ques escolars. Els alumnes amb un fort sentit numèric són capaços d'aplicar aquest coneixement en el seu procés continuat d'aprenentatge matemàtic. Aquest 'Standard' també emfasitza la comprensió i la fluïdesa en les operacions de naturalesa computacional. Això inclou comprendre com es relacionen les operacions entre elles i decidir quin mètode computacional és el més apropiat en cada situació.

- **Àlgebra.** L'àlgebra ha estat tradicionalment una àrea d'estudi reservada als nivells d'ensenyament superiors. Els '*Principis i Standards*' posen de relleu la importància de què estudiants de cursos elementals tinguin experiències que més endavant repercutixin en una fonamentació més sòlida per a l'estudi formal de l'àlgebra. L'estudi de l'àlgebra hauria de donar als alumnes l'oportunitat de comprendre regularitats, relacions i funcions. A més, els alumnes haurien d'aprendre a usar símbols algebriques i models matemàtics per a representar i analitzar relacions quantitatives, moltes de les quals varien amb el temps i, per tant, requereixen formes d'expressió flexibles.
- **Geometria.** La geometria i el sentit d'orientació espacial proporcionen als alumnes eines i recursos per tal de relacionar-se i indagar aspectes del seu entorn físic. L'estudi de formes i figures de dues i tres dimensions, especialment pel que fa a l'èmfasi en les seves propietats i relacions és un factor important d'aquest 'Standard' al llarg de tots els cursos escolars. La geometria de coordenades i la geometria de transformacions donen als alumnes dues formes de descriure i analitzar situacions físiques, a més de facilitar en molts casos els processos de resolució de problemes. Aquest 'Standard' destaca la rellevància de què els alumnes aprenguin geometria usant "models concrets, diagrames i softwares dinàmics" ('*Principles and Standards for School Mathematics*', An Overview, NCTM 2002, p. 9).
- **Mesura.** Els conceptes i processos que involucren mesura són molt importants al llarg de tota l'etapa d'escolarització obligatòria i de batxillerat, però haurien d'adquirir més protagonisme en el currículum dels cursos ele-

mentals i mitjans. El focus més adequat s'hauria de situar en els atributs mesurables dels objectes i en les unitats més convenientes de mesura per a cadascun d'aquests atributs. Comprendre que tota mesura és aproximada i reconèixer la necessitat de treballar amb un nombre convenient de dígitos significatius a l'hora de mesurar són conceptes de gran valor que cal establir amb solidesa des d'un inici. El desenvolupament i l'ús de fórmules per a computar mesures hauria de començar als cursos més elementals i anar progressant vers models més sofisticats en els cursos posteriors.

- **Anàlisi de dades i Probabilitat.** El món de la informació en què vivim requereix que els alumnes desenvolupin un fort nivell de comprensió de les formes en què s'analitzen les dades i del paper de la probabilitat en les decisions que prendran com a ciutadans informats. L'estudi de l'anàlisi de dades té el propòsit d'ajudar els alumnes a formular qüestions, utilitzar mètodes estadístics adequats i establir inferències i prediccions basades en les dades de les quals es disposa. Comprendre i aplicar els conceptes bàsics de la probabilitat hauria d'iniciar-se de manera informal a parvulari i anar avançant paulatinament vers l'estudi dels fenòmens compostos i condicionals a cursos superiors. D'altra banda, l'estudi de l'anàlisi de dades i de la probabilitat ha de permetre als alumnes aplicar els coneixements matemàtics escolars a la seva vida diària i contribuir a facilitar la seva presa de decisions.

Els cinc 'Standards' relatius a processos que convindria treballar són:

- **Resolució de problemes.** La resolució de problemes inclou tot allò que els alumnes fan a l'hora d'aprendre noves matemàtiques i en analitzar situacions de la vida quotidiana, tant a cursos elementals com a cursos superiors. A mesura que avancen en l'habilitat per resoldre problemes, els alumnes aprenen a aplicar multitud d'estratègies, a més de controlar i reflexionar sobre processos de pensament i d'abordatge de noves situacions matemàtiques. L'ús de la resolució de problemes hauria de ser recurrent al llarg de tot el currículum matemàtic perquè permetria

unificar el tractament dels temes en els seus diversos nivells.

- **Raonaments i Proves.** El fet que els raonaments i les proves siguin l'essència de les matemàtiques fa que aquests dos elements hagin de constituir part important de l'aprenentatge dels alumnes al llarg de la seva escolarització obligatoria i del batxillerat. Els alumnes necessiten experiències relacionades amb l'establiment de conjectures i l'argumentació de conclusions en totes les àrees de les matemàtiques escolars, no només a l'àrea de geometria. Per als alumnes més joves, aquestes 'proves' han de ser informals i s'han de basar en raonaments de tipus inductiu. A mesura que els alumnes avancen cursos, haurien de rebre ensenyaments que els facilitessin desenvolupar, seleccionar, usar i avaluar diversos arguments matemàtics i proves.
- **Comunicació.** Quan els alumnes comuniquen idees matemàtiques, ja sigui verbalment o de forma escrita, aproximen una millor comprensió sobre les matemàtiques que estan aprenent i, alhora, aprenen a comprendre millor els seus propis processos de pensament. En compartir les seves idees amb els altres, els alumnes organitzen, reflexionen i autoregulen la seva pròpia comprensió de les matemàtiques. En llegir o escoltar com els altres comuniquen les seves idees, siguin companys o professors, els alumnes aprenen a analitzar i regular els processos de pensament que els envolten. Els alumnes aprenen tant comunicant als altres els seus raonaments com permetent que els altres els comuniquin els seus. Per això, els discursos que es produeixen durant les sessions de matemàtiques han de ser considerats com un important focus d'informació per part del professor.
- **Connexions.** Històricament als Estats Units, les matemàtiques escolars s'han ensenyat compartimentades en un conjunt de temes aïllats els uns dels altres. Veure i aprendre les matemàtiques com un camp integrat de coneixements permet als alumnes establir connexions entre els diferents temes i conceptes que estan aprenent i els facilita aplicar en una àrea els coneixements construïts en

una altra de diferent. Els alumnes també necessiten experimentar i descobrir les connexions de les matemàtiques amb contextos externs a les pròpies matemàtiques, tant des d'un punt de vista acadèmic com a les seves pròpies vides de fora de l'escola. Aprendre matemàtiques de forma contextualitzada és vital per a la comprensió i l'ús que els alumnes facin de les matemàtiques.

- **Representació.** Representar consisteix tant en el procés com en el producte d'expressar un concepte matemàtic o relacions de diferents tipus entre conceptes. Aquesta forma d'expressió pot ser un model fet a partir de dibuixos i raonaments informals, o bé, a partir d'expressions simbòliques més formals, per dir només un parell de casos. Als alumnes se'ls hauria de donar l'oportunitat d'expressar conceptes i relacions per mitjà d'una gran varietat de representacions que organitzin i comuniquin la seva comprensió de les idees matemàtiques. Els professors han de recordar que les representacions no són un objectiu en l'aprenentatge matemàtic dels alumnes, sinó que són recursos que han de facilitar en els alumnes el desenvolupament d'una comprensió més profunda dels continguts matemàtics i la possibilitat d'intercanviar amb els altres els significats que han construït.

Els 'Principis'

Tal com indica el títol, els '*Principis i Standards per a les Matemàtiques Escolars*' es refereixen de manera separada a, d'una banda, un conjunt de continguts i processos matemàtics específics i, d'altra banda, principis generals que incideixen de forma transversal en el tractament d'aquests continguts i processos. Degut a què la idea de 'Principis' és nova respecte al primer document publicat l'any 1989, hem cregut convenient destacar-los. Els sis principis que s'examinen en el document assenyalen aspectes crucials per a una educació matemàtica de qualitat.

- El Principi d'Equitat afirma que "assolir l'excel·lència en educació matemàtica requereix altes expectatives i un fort suport a tots els alumnes" (NCTM 2000, p. 12). Això sig-

nifica que tots els alumnes haurien de tenir accés a un currículum i una instrucció que afavorís el seu aprenentatge dels continguts i processos matemàtics compilats als 'Standards'. De tota manera, això no vol dir que tots els alumnes hagin de rebre una instrucció idèntica, sinó que s'ha de proveir a cada alumne dels recursos i les ajudes per a què aprengui i arribi a desenvolupar tant com sigui possible les seves potencialitats. Perseguir un principi d'equitat exigeix recursos i oportunitats de desenvolupament professional per a professors i escoles.

- El Principi del Currículum assenyalava que "un currículum és molt més que una col·lecció d'activitats; ha de ser coherent, s'ha de centrar en parts importants de les matemàtiques i, a més, s'ha d'anar articulant al llarg de tots els cursos" (NCTM 2000, p. 14). La coherència del currículum implementat a nivell d'aula es basa en centrar la instrucció al voltant del desenvolupament d'una idea central, més que no pas en parlar atenció a diferents idees alhora, per molt que aquestes estiguin relacionades entre elles. L'èmfasi en parts importants de les matemàtiques significa que els temes i conceptes s'han d'escollir de manera que proporcionin als alumnes els fonaments que els ajudin a comprendre d'altres idees i processos matemàtics. Articular el currículum de manera coordinada al llarg de tots els cursos garanteix que les experiències dels alumnes amb les matemàtiques siguin un punt de partida per tal de construir una comprensió cada cop més profunda i àmplia dels diferents conceptes tractats. Això ha d'evitar innecessàries revisions sistemàtiques de continguts apresos en cursos anteriors.

- El Principi d'Ensenyament destaca que "un ensenyament efectiu de les matemàtiques requereix comprendre quins alumnes saben quins coneixements, quins necessiten aprendre'ls i reptar-los i ajudar-los a aprendre'ls bé" (NCTM 2000, p. 16). Per tal d'aconseguir-ho, mestres i professors han de tenir una profunda i àmplia comprensió de les matemàtiques i de la seva pedagogia. Els coneixements en matemàtiques i pedagogia hauran d'orientar la seva presa de decisions i

les accions que duren a terme a les aules. Un ambient d'aula alhora encoratjador i difícil, on la normalitat vingui constituïda per tasques matemàtiques amb significat és crucial en els processos d'aprenentatge matemàtic dels alumnes. Per últim, un ensenyament efectiu requereix que mestres i professors prenguin part en activitats de desenvolupament professional, tinguin espais i oportunitats de reflexió i col·laborin amb els seus companys.

- El Principi d'Aprenentatge ressalta que "els alumnes han d'aprendre matemàtiques de forma significativa, construint activament nous coneixements des de les seves experiències i coneixements previs" (NCTM 2000, p. 20). La comprensió dels conceptes, juntament amb el coneixement dels fets i la facilitat per a justificar procediments és una part important de ser bo en matemàtiques. Per tant, la comprensió no ha de ser reduïda a una mera memorització sistemàtica de fets i procediments. Mestres i professors han de proporcionar experiències als seus alumnes per tal que aprenguin a construir la seva pròpia comprensió de les idees i dels conceptes matemàtics des de parvulari fins a batxillerat.
- El Principi d'Avaluació enuncia que "l'avaluació hauria de representar un suport en l'aprenentatge de les matemàtiques i controlar que s'estigui construint informació útil tant per als professors com per als alumnes" (NCTM 2000, p. 22). L'avaluació no pot ser vista únicament com els exàmens que se'ls dona als alumnes al final d'una seqüència d'instrucció amb la finalitat de comprovar si han après uns determinats continguts. L'avaluació també ha de ser vista com una part integral de l'ensenyament i l'aprenentatge, encarregada de suggerir canvis en la instrucció a mesura que el professor va prenent decisions i està disposat a revisar-les. El procés d'avaluar es pot dur a terme de maneres molt diferents, des de tests basats en pregunta-resposta fins a diaris de l'alumne i fitxes més complexes. Totes aquestes maneres s'haurien d'alternar i haurien d'orientar els alumnes en el seu aprenentatge, així com determinar el seu progrés en l'assoliment dels objectius i dels 'standards'.

- El Principi Tecnològic emfatitza que "la tecnologia és essencial en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques; la tecnologia influeix en les formes en què s'ensenyen les matemàtiques i facilita els processos d'aprenentatge dels alumnes" (NCTM 2000, p. 24). Les calculadores i els ordinadors poden tenir un profund impacte en com s'ensenyen les matemàtiques a l'aula sempre que mestres i professors s'adonin de tots els avantatges que suposa treballar amb recursos tecnològics, tals com dibuixar gràfics per mitjà de calculadores, visualitzar relacions gràcies als ordinadors, o bé computar sèries de números. La tecnologia ofereix a mestres i professors eines de gran utilitat per tal de donar suport a les investigacions dels alumnes, a les seves reflexions, als seus raonament i, en definitiva, als seus processos de resolució de problemes.

Entrevista a Stephen Willoughby, ex-president de l'NCTM

Volem tancar l'article amb els comentaris i la perspectiva d'un educador matemàtic molt ben conegut arreu del món, que durant el període en què fou president del *National Council of Teachers of Mathematics* tingué la responsabilitat de contribuir a desenvolupar els 'Standards' originals. El professor Stephen Willoughby va començar la nostra conversa amb una reflexió sobre les característiques dels 'Standards' de l'any 1989, dient que en aquell moment existia una important pressió als Estats Units per a tornar altre cop a continguts i metodologies clàssiques, moviment que es va anomenar com "*back to basics*". El document del 1989 va ser en part creat com a resposta a aquest moviment. Malauradament, en paraules de Willoughby, "*des d'aleshores s'han vingut dient moltíssimes coses en nom dels 'Standards' que en la meua opinió no tenen res a veure amb el que vaig defensar i continuo defensant...Hi ha molta gent que està fortament convençuda de què el que l'NCTM, a través dels 'Standards', ha estat dient durant els darrers anys és que 'no s'haurien d'aprendre les habilitats matemàtiques bàsiques que tradicionalment s'han ensenyat a les escoles', però aquesta no ha estat mai la idea de*

l'NCTM...Es tracta d'obtenir aquestes mateixes habilitats matemàtiques bàsiques per mitjà de processos de pensament de manera que els alumnes arribin a veure les matemàtiques com un conjunt de situacions a resoldre i no com una simple repetició i memorització del que altres diuen o fan".

Què hi ha de nou en el darrer document ('Principis i Standards')?

Al meu entendre, s'ha produït una millora importantíssima; ha servit per a què la gent s'hagi donat compte d'algunes de les malinterpretacions que van fer de l'anterior document i, a més, aquest nou document ha sorgit d'un procés de molta interacció entre diferents grups de la comunitat educativa. D'alguna manera, podem dir que els matemàtics van ser ignorats en la confecció dels 'Standards' del 1989. En aquest segon document, es recupera l'equilibri necessari, a més de posar-se de manifest nombrosos punts de connexió, entre conceptes sòlids de matemàtiques i l'èmfasi en l'anomenat aprenentatge per descobriment, que sovint s'ha exagerat en detriment d'un aprenentatge més profund de les matemàtiques.

Què li agradaria que en treïés algú que llegís els 'Standards' de l'any 2000?

Voldria que qualsevol lector dels nous 'Standards' veiés clar l'esperit amb què han estat escrits, que hi ha gent que comet errors i que, abans de dir "ara ja sé les respostes", caldria entendre que hi ha molts bons professors, molt llestos, molt intel·ligents i amb molta experiència que han col·laborat en la elaboració d'aquestes respostes i que potser algunes de les idees que expliquen no són tan bones en uns o altres contextos, i que, per tant, el que hem de fer és situar aquestes idees en els nostres propis contextos d'actuació. Per a mi, els

'Standards' haurien de ser un document que engresqués a la gent a pensar sobre els seus models d'ensenyament, i en cap cas un document que els engresqui a dir "Ah!, ara ja sé les respostes sobre com s'ha d'ensenyar i ja no cal que hi torni a pensar mai més".

Què creu que falta en aquest nou document?

Si jo l'hagués escrit, crec que l'hagués fet bastant més curt. No es tracta tant de què falti alguna cosa, sinó més aviat de què és excessivament voluminós. El fet que sigui tan extens pot ser un veritable problema ja que és molt fàcil que a la gent li passin per alt els punts realment importants del document, com ara que la matemàtica és quelcom sobre el que hauríem de pensar molt més, que l'educació matemàtica és quelcom que també mereix moltes reflexions i pensaments alternatius, i que entre tots hauríem de discutir i opinar sobre l'una i l'altra.

Què pensa que pot ser d'utilitat per a una audiència internacional?

Fins ara, sembla que gent d'altres països ha comprès bé l'esperit que fa sorgir la necessitat d'elaborar uns 'Standards', i quines han estat les dificultats involucrades en la creació original d'aquests 'Standards' l'any 1989. Altre cop, el que és important és que vegin en quina mesura poden aplicar les reflexions fetes en l'àmbit nord-americà dins d'altres àmbits geogràfics. Per a mi, és fonamental veure el procés històric que porta a elaborar uns 'Standards', més que limitar-se a copsar missatges aïllats del document. No hem après a aprendre dels errors dels altres, i això sempre ha estat per a mi una font de sorpreses. En un país es pot cometre un error important en l'educació matemàtica, detectar-lo i que, malgrat això, en un altre país es continuï cometent exactament el mateix error.

Piràmides

Helena Forrellad¹

Escola Bellaterra

1. Introducció: Espai i forma

És possible posar límits a l'espai, però per la seva naturalesa és il·limitat i intangible. L'espai es dissol en la foscor i s'evapora en l'infinit. Per a fer-se visible, l'espai ha d'adquirir forma i límits, o a la naturalesa o per la mà de l'home.(Sigfried Giedion)

L'activitat geomètrica va sorgir, d'una manera natural, en cada una de les civilitzacions que formen l'entramat de la història de la humanitat. Van practicar geometria els babilonis, els egipcis i els grecs; però també els xinesos, els vedes, les antigues cultures peruanes, els "guanches" canaris o qualsevol de les cultures africanes. I és que l'activitat geomètrica és una conseqüència de la necessitat que han tingut totes les societats humanes d'orientar-se en el seu entorn medio-ambiental, de dissenyar objectes, eines i màquines belles i eficaces, de limitar (amb l'arquitectura) espais significatius per a ser habitats, o de plasmar (amb la pintura o l'escultura) una representació creïble de les coses i del seu món.

De la mateixa manera, els nens i les nenes, en néixer, inicien una experiència personal amb l'espai. Espai i forma són coneixements essencials en la relació que estableixen amb l'entorn.

Les sensacions que produeix en els petits la manipulació intencionada dels objectes i el seu propi moviment per l'espai, es combinen en la seva ment amb les imatges que els genera la seva visió i amb els significats que abstraen dels comportaments de les altres persones. D'aquesta manera construeixen un coneixement del món en el qual s'integra la forma plàstica amb el concepte òptic de les formes i els espais.

Ben aviat parlen, dibuixen i construeixen, desenvolupant llenguatges que els permeten explicar-se a si mateixos, i compartir amb els altres, els significats de la seva experiència espacial i de la forma.

Cada nen i cada nena, així, va construint un saber únic i valuós que anirà creixent amb el temps, de la mateixa manera que aniran evolucionant les seves formes de representació.

En l'aprenentatge de l'espai i la forma, com en molts altres aprenentatges, no sempre afegim coneixements nous als que ja tenim. Sovint avançar és comprendre millor els que ja posem perquè això ajuda a aprofundir en la concepció del món que anem construint. Cal avançar en amplitud però també en profunditat.

En aquest article parlarem d'uns treballs realitzats per nens i nenes de segon de primària (7 o 8 anys) a partir d'un projecte sobre les piràmides d'Egipte. Ho farem tenint en compte les experiències individuals i valorant-ne les idees personals.

Amb aquest objectiu veurem quatre exemples de dibuixos realitzats sota consignes diferents i observarem a què s'enfronten i com ho fan.

Ens interessa l'objecte d'aprenentatge, les piràmides en aquest cas, però no només com a realitat objectiva. Per sobre de l'objecte situem la persona que mira, que interpreta, que dialoga amb si mateixa, amb la realitat i amb els altres, que comprèn i explica allò que ha entès utilitzant diferents sistemes de representació.

Parlarem, també, de l'aprenentatge d'espai i forma reflexionant sobre alguns dels possibles aspectes que aquests conceptes poden abastar quan se situen dins d'un context real concret.

(1) Grup ICE-UAB "La cultura matemàtica de les persones"

En definitiva, pretenem donar un sentit ampli a l'estudi de l'activitat geomètrica considerant que flueix en els petits a partir de la seva necessitat d'entendre i d'explicar el món i que cal, per tant, integrar-lo en un aprenentatge global.

2. Els dibuixos de les piràmides

A través dels quatre exemples seguirem, doncs, una part de la ruta recorreguda pels nens i les nenes en l'estudi del projecte, veurem quines idees posen en joc en relació a espai i forma i com les representen.

Però per situar una mica el context d'aprenentatge en donarem alguns detalls.

Les preguntes que es fan els alumnes a l'iniciar el tema són les següents:

- Com són les piràmides per dintre i per fora?
- Com són de grans les pedres?
- Com les enganxen?
- Com les tallen?
- Com ho fan per aconseguir la forma?
- Sempre fan triangles?

A més a més d'obtenir respostes a aquestes qüestions també es proposen de construir la maqueta d'una piràmide.

Fer una maqueta suposa enfrontar-se a una representació tridimensional. Cal, primer, fer un projecte i després portar-lo a terme superant les dificultats que van sorgint en el procés: per trobar l'altura de la piràmide, per construir el quadrat de la base, per trobar el centre del quadrat i, sobretot, per assegurar-se de les seves simetries, que de fet, són les que donen un significat global geomètric a la seva forma.

Veure com s'hi enfronten els nens i les nenes i quines situacions d'aprenentatge es generen és molt interessant però no és l'objectiu d'aquest article. Això no obstant, cal fer-ne esment perquè l'acció i l'experiència dels alumnes amb la maqueta va modelant un diàleg amb la forma que es reflecteix en el coneixement que construeixen, en les actituds que els impliquen amb l'aprenentatge i, finalment, en els dibuixos que fan, que comentarem més endavant.

2.1. Sobre els sistemes de representació

En la nostra civilització hem construït quatre sistemes de representació bidimensional: acotat, dièdric, axonomètric i cònic. Estan perfilats per satisfer necessitats conceptuals i comunicatives diferents.

Cada un d'ells té un disseny sistemàtic i coherent que els permet ser útils per seleccionar certes propietats geomètriques i crear amb elles un significat visual adequat al context en el qual s'està utilitzant.

Aquesta coherència interna i funcional que tenen aquests sistemes de representació els dona a cada un d'ells un sentit propi com a procediments organitzats de comunicació.

Per exemple, per fer un plànol d'una casa s'utilitza el sistema acotat, en secció perquè l'objectiu és mostrar les mides reals de l'interior de l'edifici. En canvi, si allò que es vol explicar té a veure amb l'aspecte extern de la casa podríem utilitzar el sistema axonomètric.

Els nens i les nenes quan dibuixen utilitzen també aquests sistemes de representació, tot i que ho fan d'una manera intuïtiva i personal, sovint combinant-los. Aquesta manera de comportar-se sembla que es deu a les dificultats que tenen per integrar clarament els trets de la forma que pretenen descriure i, per tant, el procediment gràfic que han d'escollir.

Fa la impressió que l'aparença de l'objecte flueix en el seu pensament derivant d'unes visions a unes altres, empenyent també les característiques del sistema de representació que utilitzen.

Per tant, la seva acció respon clarament a la necessitat que tenen d'explicar allò que per a ells és important. La seva decisió no sembla ser fruit de l'atzar, sinó més aviat una decisió que respon a una intenció determinada.

Observant els dibuixos ens fixarem en com usen els sistemes de representació i mostrarem com, a partir de la consigna que reben, desenvolupen un procés que els porta a crear textos geomètrics per descriure la forma de les piràmides.

2.2. Dibuixem la piràmide per fora: espai volumètric tancat

La primera concepció espacial arquitectònica és una arquitectura de volums en l'espai. (Sigfried Giedion)

EXEMPLE 1

Amb aquest dibuix la Marta explica com és una piràmide per fora.

Per fora, la piràmide és tancada pels límits del mateix objecte: els quatre plans triangulars, però la representació es veu condicionada per l'ús de l'espai bidimensional que obliga a seleccionar la visió que se'n vol mostrar ja que *tot edifici posa límits a la llibertat visual i espacial de l'observador*.

La Marta es decanta per una visió frontal, dibuixant un triangle amb mides reals, és a dir, mantenint les proporcions entre alçada i amplada. Això vol dir que per a ella aquest és un dels elements estructurals fonamentals.

Triar un punt de vista frontal suposa situar-se fora de la piràmide i tenir en compte l'alçada com a una de les dimensions espacials principals. De fet, la Marta coincideix amb la concepció egípcia que prioritza l'eix vertical i és que *l'alçada és la clau de les relacions internes de l'estructura piramidal* (uneix la terra amb el cosmos).

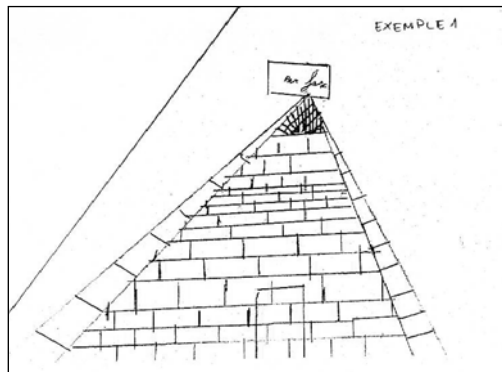
Des d'aquest punt de vista no es podria veure més que una cara però ella dibuixa, també, dues cares més, a banda i banda, que aprima simulant l'efecte òptic.

La raó per la qual representa tres cares té a veure amb la comprensió i la valoració que la piràmide té volum, un volum que emergeix de la convergència dels plans.

No obstant això, aquesta imatge no és possible, en un sistema de representació convencional, si no recorrem al sistema cònic, amb un punt de fuga situat sobre la línia de l'horitzó.

Evidentment, la Marta no disposa d'aquest coneixement però en certa manera intueix que hi ha un angle des del qual aquesta visió seria possible i, a la seva manera, és això el que ens explica.

No mostra, en canvi, una preocupació especial per la forma quadrada de la base.



2.3. Dibuixem la piràmide per dintre: secció d'un espai volumètric tancat

...quan construïm no fem altra cosa que destacar una quantitat convenient d'espai, tancar-lo i protegir-lo, i tota arquitectura sorgeix d'aquesta necessitat. (Bruno Zevi)

EXEMPLE 2

L'Alberto respon a la consigna de dibuixar la piràmide per dintre i ho fa, com la Marta, situant-se fora d'aquesta i dibuixant-la frontalment.

Evidentment, li cal fer una secció perquè la seva visió des de fora no li permetria veure l'interior.

En aquest cas la piràmide queda limitada per les arestes d'un sol triangle i és que allò que aquest nen vol descriure és l'espai interior, i creu que amb aquesta representació ja queda explicat. De fet no es qüestiona la diferència entre l'espai bidimensional del triangle i l'espai tridimensional de la piràmide.

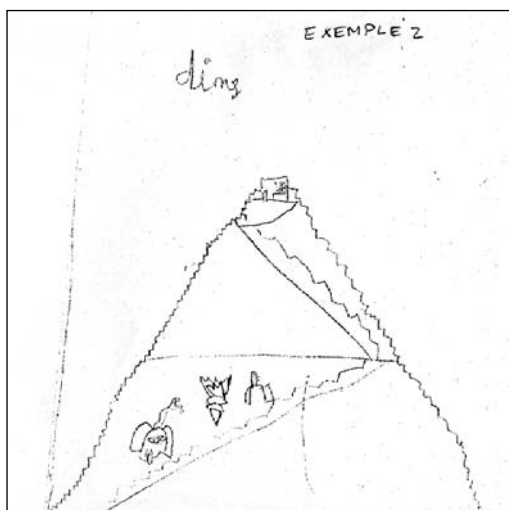
Utilitza el sistema de representació dièdric però només en part, ja que no dibuixa la base quadrada de la piràmide que és el que acabaria de completar-la, i és que no ha pogut tenir en compte una de les dimensions de l'espai: la profunditat.

L'espai interior de la piràmide és una creació de la seva imaginació i respon a la funcionalitat que ell li atorga, semblant a la d'una casa.

Aquest nen també utilitza l'alçària com la dimensió espacial bàsica mostrant-nos la importància que aquesta dimensió té en les piràmides. Hi fa pisos i escales per omplir aquest gran espai i reflecteix altra vegada la *supremacia de la vertical*. Aquí, no obstant, veiem com a més de la vertical representa també l'horitzontal, que fa servir per anar separant els diferents pisos. I és que *la vertical i l'horitzontal van juntes. No poden ser concebudes independentment*.

L'interior s'entén, doncs, com un espai per viure i li atribueix la distribució que creu que aquest pot tenir.

Concep, doncs, aquest espai, com un espai arquitectònic, un espai que s'habita i que, per tant, *es pot travessar*, tot i que no acaba de trobar la manera de donar-n'hi el seu sentit ple.



2.4. Sóc a dins de la piràmide: Espai volumètric obert o inacabat

Tot i que l'espai és intangible, entre l'home i l'espai hi ha una relació psíquica. (Sigmund Freud)

EXEMPLE 3

En aquest cas es demana als nens i les nenes que s'imaginin que es troben a l'interior d'una

piràmide buida. Se'ls determina una posició i un punt de vista: si mirem cap amunt, què veiem?

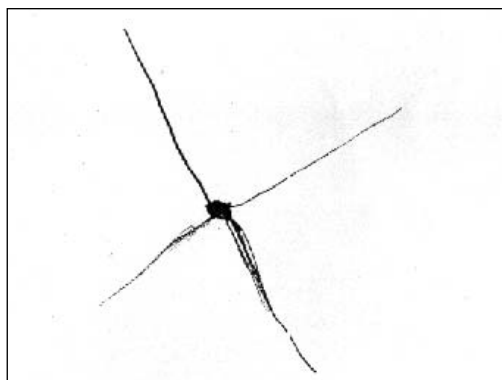
El canvi de consigna, tot i que com al dibuix anterior es refereix a l'espai interior, és absolutament diferent, és una consigna tancada i condiciona els tipus de solucions que es poden donar.

La Mireia, amb el seu dibuix, vol explicar allò que veu, i ho representa amb una imatge que és fruit d'una visió estàtica. I ho fa utilitzant el sistema acotat però en una visió en contrapicat.

La imatge reflecteix els límits del seu camp visual en situar-se com a observadora *clavada a un punt de vista fix*.

La representació que fa és una elaboració intel·lectual, imagina el que veuria i per a fer-ho dibuixa els elements estructurals que configuren la piràmide sense afegir-hi res que sigui accessori: quatre arestes que convergeixen en un punt central, que assenyalen especialment, creen un espai format per plans inacabats.

Sorprenentment, és capaç de deslligar-se de la pressió psicològica que comporta l'enfrontar-se a un espai no acabat, insuportable per a molts adults, i ens mostra com la concepció de l'espai, lliure de prejudicis, pot ser extraordinàriament complexa en els infants. Aquest nivell de reflexió i abstracció no sorgeix del no res, creix perquè se situa en un context d'aprenentatge que genera interès, misteri. I, dins d'aquest context, l'atracció que generen les piràmides es converteix en fascinació quan els nens i les nenes imaginen l'espai vist des de dintre.



2.5. Dibuixem una piràmide de vidre: espai dinàmic

...la realitat de l'objecte no s'esgota en les tres dimensions de la perspectiva; per representar-la integralment haurien de fer-se un número inacabable de perspectives des dels infinits punts de vista. Hi ha, per tant, un altre element, a més a més de les tres dimensions tradicionals i és precisament el desplaçament successiu de l'angle visual. Així fou batejat el temps com "quarta dimensió". (Bruno Zevi)

EXEMPLE 4

La consigna que es dona, de dibuixar la piràmide com si fos de vidre, té com a objectiu provocar un repte als nens i les nenes per tal que hagin d'enfrontar-se a una representació de la piràmide que tingui en compte la profunditat.

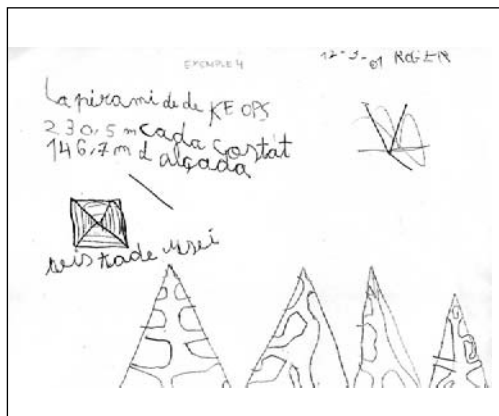
Moltes de les diverses representacions que en fan mostren la voluntat i l'intent d'afrontar aquesta qüestió. En l'exemple que presentem, però, hi trobem un tipus de resposta diferent.

El Roger, a qui per cert, li costa un gran esforç de concentrar-se en l'aprenentatge escolar, entén que el fet que la piràmide sigui de vidre implica que s'han de veure totes les cares. La piràmide és un volum i ell entén que els quatre plans triangulars en són els seus elements constituents. Però no les representa de manera integrada sinó que fa els quatre triangles corresponents a les quatre cares, l'un al costat de l'altre com fent un desplegament. Aquesta forma de representació té punts de connexió amb el sistema dièdric, tot i que en aquest cas no s'adona que dibuixant un sol triangle amb mides reals (de nou, mantenint les proporcions) ja no caldria explicar els altres perquè tots són iguals. De tota manera la seva idea va més enllà d'explicar les dimensions i formes de la piràmide.

El Roger té la intenció de fer una descripció completa del que veuria si la piràmide fos de vidre i imagina la totalitat de la piràmide com si pogués anar-la explicant per fases, canviant el punt de vista progressivament, com si es tractés d'una seqüenciació temporal de les seves diferents visions. Per això dibuixa els

laberints de l'interior cada vegada d'una manera diferent.

De fet, fa un recorregut al voltant de la piràmide i, al fer-ho, afegeix al concepte d'espai una nova dimensió, una dimensió reivindicada fa alguns anys pels artistes cubistes: el temps.



3. Textos Geomètrics

Cal alternar la reflexió i l'acció que es completen i corregeixen l'una a l'altra. (Gaudí)

Hem vist com els nens i les nenes, en fer els dibuixos, pensen en quina és la intenció que els guia i a partir d'aquí, decideixen què és el que cal explicar. Després, han de pensar com dibuixar-ho.

Pensar en com resoldran la representació bidimensional d'un objecte tridimensional crea la necessitat de reflexionar sobre com és l'objecte.

Amb els seus dibuixos els infants ens expliquen com se situen davant l'objecte, des de quin punt de vista i amb quina intenció ho fan, què comprenen i què tenen en compte. Podem adonar-nos d'allò que prioritzen i seleccionen.

En descriuen les característiques estructurals però els aspectes formals no queden deslligats de la funcionalitat i del significat que s'atribueix a l'objecte, ni desvinculats dels aspectes emocionals que aquest genera.

En dibuixar, els nens i les nenes topen amb dificultats relacionades amb el domini del llenguatge plàstic i les dificultats els obliguen a

retornar de nou sobre l'objecte i seguir reflexionant sobre l'espai i la forma per poder trobar una sortida que els convenci. I és que dibuixar és superar el repte d'explicar allò que un mateix ha decidit que és rellevant, significatiu.

Els dibuixos són fruit del diàleg de l'infant amb sí mateix, amb la realitat i amb el llenguatge que està utilitzant per explicar-se. També són fruit del diàleg amb els altres.

Aquest procés creatiu que es podria connectar amb el que fa un escriptor al descriure amb paraules un paisatge o un personatge, és constructor de coneixement i és el que configura el dibuix com un text geomètric, que també és descriptiu.

4. Conclusions: Què Explico, què m'expliques?

L'aula com a comunitat d'aprenentatge

La veritat només existeix en l'experiència de cadascú, i fins i tot aleshores, des del moment que és explicada, esdevé història. (Gao Xingjian)

La comprensió d'espai i forma s'integra en la construcció de l'univers personal que va configurant cada persona. N'és una dimensió essencial com també ho és el temps. Parlar d'espai és parlar d'existència, de vida, de realitat.

La persona en viu una experiència única i irrepetible tot i que sovint en té poca consciència.

Per això, en l'aprenentatge de la geometria a l'escola, cal tenir molt en compte aquesta experiència profunda i rica com també cal comprendre la importància del punt de vista.

Fixem-nos en aquesta conversa que es dona a l'aula comentant el dibuix que hem presentat en l'exemple 3.

Júlia *Jo crec que és la punta de la piràmide.*

Mestra *Des d'on la veiem?*

Arnau *Des de dalt.*

Patricia *Per què ha dibuixat la piràmide per fora si tu vas dir que no es podia?*

Mireia *És la punta de la piràmide. M'imaginava que estava a dins, que estava buida i només veia això.*

Pol *Si hi ha un passadís hi hauria un sostre.*

Mireia *Va dir l'Helena que estava buida.*

Patricia *Però l'Helena va dir que era des de dins i ho has fet des de fora.*

(Agafem una maqueta de cartró de la piràmide i la mostrem als nens i les nenes.)

Mestra *Imaginem que som a dins de la piràmide. Ho podríem veure això que ha dibuixat?*

Nens *Si...No...*

Més que arribar a una conclusió concreta, allò que és interessant és l'esforç d'imaginar, contrastar idees, intentar comprendre la visió de l'altre... Podem veure com es movilitza el pensament per trobar els arguments que responguin a les seves conviccions.

Aquestes converses on algú explica què ha fet o on s'interpreten els uns als altres, ajuden a comprendre que els objectes poden ser mirats des de diferents punts de vista i a aprendre que la realitat pot tenir moltes cares, molts significats, no és única ni inamovible.

La interacció genera obertura i multiplica les perspectives.

No oblidem, però, que el paper del mestre és fonamental tant en el plantejament de les situacions com en la seva dinamització.

Així, a l'aula, es van construint sabers individuals però, alhora, un saber del grup. Aquest últim serà el marc de referència que socialitza els seus coneixements creant punts d'estabilitat a partir dels quals poder avançar. Però aquest saber no es pot tancar del tot, cal que els mestres afrontem el repte de moure'ns i deixar moure els nens i les nenes entre la realitat objectiva i la realitat subjectiva. Cal superar la por a la incertesa i al canvi i afrontar-la amb imaginació i voluntat d'aprendre dels alumnes i amb els alumnes.

Aquesta manera de fer ens fa entendre la matemàtica com un saber dinàmic que eixampla les mirades dels nens i les nenes sobre la realitat i contribueix a construir una xarxa de pensament flexible, integradora i global.

Comprendre la importància de poder mirar les coses des de diferents punts de vista, finalment, és avançar en la formació de valors relacionats amb el respecte i l'acceptació de les maneres de ser i de pensar dels altres.

I és que les matemàtiques ajuden a construir significats i arguments sobre la realitat i, a la vegada, tenen un paper important en la creació d'actituds davant del món que ens envolta.

En aquest sentit podem dir que les matemàtiques, a més a més d'útils, són valuoses i significadores.

BIBLIOGRAFIA

Bishop, A. (1988): *Enculturación matemática*. Paidós, Barcelona 1999

Forrellad, H. Rigol, A. Gallego, C. (2000): *La máquina del tiempo*, Kikiriki, 58, 73-82.

Gallego, C. (1999): *Lògica té nom de dona*. Aloma, 5, 113-141

Gallego, C. (2001): *Incluir en el saber*. Aula de Innovación Educativa, 103-104, 6-12

Gallego, C. *Como son los significados matemáticos que construyen los niños? La funcionalidad de la lógica*. Actas "Cinco jornadas d'educació infantil" ICE UAB

Gallego C. i Seminari "Repensar les matemàtiques" (2000): *Repensar l'aprenentatge de les matemàtiques*. Govern de les Illes Balears, Conselleria d'Educació i cultura. Palma de Mallorca.

Giedion, Sigfried (1981) *El presente eterno: los comienzos de la arquitectura*, Alianza Forma, Madrid, 1997

Gorgorió, N. et al. (2000): *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Graó- ICE.UB

Caixa de pensions (1999): *Gaudí, l'home i l'obra*, Lunmerg Editores

Preta, L. (comp) (1993) *Imágenes y metáforas de la ciencia*. Alianza Editorial, Madrid

Zevi, B. (1998) *Saber ver la arquitectura*, Ediciones Apóstrofe

Gingjian, G. (2001) *La muntanya de l'ànima*. Columna Edicions



Subscriu-t'hi

Col·labora-hi

e-mail: biaix@elistas.net
www.ice.urv.es/apmcm/biaix.html

Per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu

Universitat Autònoma de Bellaterra. Jordi.Deulofeu@uab.es

El passat 20 de febrer de 2002 vaig participar en l'acte de cloenda de la Ia Fira de la Matemàtica de les escoles públiques de Sarrià-Sant Gervasi (Barcelona) i la curiositat de la data (20-2-02 o bé 20-02-2002) va suggerir-me el tema de la xerrada: els nombres capicues. Aprofitant alguns dels problemes d'aquella ocasió, més algun de nou que he pensat posteriorment, dedico aquesta secció a parlar d'aquests nombres tan curiosos.

Tots sabeu que un nombre és capicua si llegit d'esquerra a dreta és el mateix que de dreta a esquerra. També podem dir que un nombre és capicua si a quan invertim la posició de totes les seves xifres (passant la primera a l'última, la segona a la penúltima, etc.) el nombre obtingut és el mateix. L'interès pels capicues, a nivell popular, va lligat als bitllets de tramvia, en concret a la Barcelona de principis del segle XX i a la creença que si et tocava un capicua tindries sort tota la jornada.

Problema 1. Començarem amb un parell de recreacions senzilles relacionades amb l'any capicua en què ens trobem i que podeu plantejar als vostres alumnes:

A) Digueu a algú que pensi un nombre de sis xifres de la forma $abcabc$ que sigui parell, per exemple 752752. Deixeu-li una calculadora i demaneu-li que divideixi el nombre per 2, el resultat per 7, el resultat per 11 i el resultat per 13. Demaneu-li el resultat final i ràpidament podreu dir-li el nombre pensat (n'hi ha prou doblant el nombre que us hagin dit i repetir-lo per formar l'inicial. Amb el nombre de l'exemple us diran 376, que doblat és 752, per tant, el nombre era el 752752). Com sempre la gràcia es troba en saber per què funciona el truc, per què tots els quocients són enters i quina relació té

aquest entreteniment amb l'any en què ens trobem.

B) Aquest el podeu fer amb tota la classe. Escriviu l'any que vàreu néixer. A sota anoteu un any en què us va passar una cosa molt important. Anoteu a sota els anys que tindreu el 31 de desembre d'aquest any i finalment anoteu a sota els anys que fa que va passar aquest esdeveniment tant important. Sumeu els quatre nombres i us endevinaré el resultat d'aquesta suma de la que no conec cap nombre.

Problema 2. Seguim en el món de les recreacions i ara parlem de dates capicua. És habitual que en la vida d'una persona hi hagi varis anys capicues? Una persona del primer mil·lenni en podia viure diversos (un cada 10 anys: per exemple, el 828, el 838, el 848, etc.). A partir de l'any 1000 la cosa es fa més difícil i la majoria de la gent no en va viure cap (els nascuts a partir de 1002 i morts abans del 1111, o bé els nascuts a partir de 1882 i morts abans del 1991, no en van viure cap, i la resta, com a màxim en vivia un). Però, tots els que tenim 11 o més anys n'hem viscut dos, el 1991 i el 2002, i potser algú en viurà tres, (1991, 2002, 2112) si viu més de 121 anys!!

De dates capicua n'hi pot haver força més. El 20 de febrer d'enguany fou capicua tant si l'escrivim així: 20-2-02, com així 20-02-2002, i també si posem els mesos en xifres romanes: 20-II-02, però no ho és, si l'escrivim així: 20-2-2002, o bé així: 20-02-02. Per analitzar si n'hi ha moltes o poques cal posar-se d'acord en la manera d'escriure la data. Si ho fem així: 20-2-02, l'any passat i aquest en tenim 10 cada any: 10-1-01, 10-2-01, fins a 10-9-01, i també 10-11-01. El 2003 una menys: 30-1-03, 30-3-03, ja que febrer té només 28 dies, i l'última

d'aquest any serà 30-11-03. A partir del 2004 la cosa s'acaba, ja que cap mes arriba als 40 dies. Així que hauréu passat 29 dates capicua en menys de tres anys (del 10-1-01 al 30-11-03) i la propera no vindrà fins el primer dia de l'any 2011, que serà 1-1-11, any que tornarà a haver-n'hi moltes.

Ara bé, el que resultà excepcional fou la següent situació: Imagineu un rellotge/calendari digital amb 12 xifres. Per exemple, si marca: 11 43 12 06 20 02, vol dir que són les 11h 43 min del dia 12 de juny de 2002. El dia 20 de febrer d'enguany, a les vuit i dos minuts del vespre, aquest rellotge marcava un fantàstic capicua de 12 xifres, format per la triple repetició del capicua que correspon a l'any actual: 20 02 20 02 20 02. Sabríeu trobar quan s'havia donat aquesta magnífica coincidència i quan es tornarà a donar?

Problema 3. Podem preguntar-nos si hi ha molts capicues o, millor dit, si la probabilitat d'obtenir un bitllet de tramvia amb un nombre capicua (nombres de 5 xifres) és gaire elevada. Si féssim quatre viatges al dia durant un any (suposem 250 dies laborables) quants capicues ens tocarien, aproximadament? El resultat us permetrà entendre quina és la *dificultat* de col·leccionar bitllets capicua, i per què aquesta és una col·lecció factible (el meu oncle en tenia una completa), mentre que ningú tindrà la idea de fer una col·lecció de capicues de bitllets d'euro (el nombre que els identifica té onze xifres).

De manera general, podem tractar d'esbrinar com varia la quantitat relativa de capicues d'acord amb el nombre de xifres, i amb això tindrem un problema, la resolució del qual ens donarà una idea de la quantitat relativa de capicues: tots els nombres d'una xifra són capicues, mentre que de dues xifres n'hi ha un 10% i, curiosament, de tres xifres també n'hi ha un 10%. Si seguiu veureu com decreix la quantitat i podeu trobar una expressió, prenent n com a nombre de xifres, que us doni la quantitat rela-

tiva en funció del nombre de xifres. Què passa si considerem els nombres escrits en una base qualsevol? Si heu arribat fins aquí, no us costarà gaire pensar la següent qüestió: Tenim tots els naturals; quina és la probabilitat d'obtenir un capicua en prendre un nombre a l'atzar?

Problema 4. Acabarem l'article amb una petita (o gran, segons com es miri) investigació, que podeu trobar a *Investigando las Matemáticas* (Fisher-Vince, ed. Akal, 1989). Preneu un nombre, per exemple 63, invertiu les xifres i sumeu: $63 + 36 = 99$. És capicua. Proveu amb un altre: 58. Tindrem: $58 + 85 = 143$; repetim el procés: $143 + 341 = 484$. Hem arribat a un capicua amb dos passos. Provem amb un tercer: 68; $68 + 86 = 154$; $154 + 451 = 605$; $605 + 506 = 1111$. Ara han calgut tres passos.

Amb nombres de dues xifres sempre s'acaba en un capicua, però alguns requereixen fins a 24 passos. Investigueu quins nombres acaben ràpid en capicua i quins no. Amb nombres de tres xifres, la cosa es complica força més, fins al punt que uns pocs, com el 196 sembla que no arriben mai a capicua. He treballat sobre aquest problema, i l'amic Xavier Valls amb l'ajut d'un ordinador encara més, fins a trobar quins eren aquests nombres i què els passava, però sense acabar de resoldre totalment el problema. A veure si us animeu i trobeu una resposta completa.

Si encara no us heu cansat dels capicues podeu tractar de construir quadrats màgics formats per nombres capicua. De 3×3 , no costa gaire (amb tots els capicues de dues xifres, o amb 9 dels 10 capicues d'un mil·lenni, per exemple, del 2002 al 2882), però també podeu provar de construir-ne de 4×4 amb capicues consecutius, encara que la cosa es complica una mica ja que no es poden trobar 16 capicues en progressió aritmètica. Si us agraden els reptes, tracteu de construir-ne un amb capicues consecutius des del 1221 fins al 2772. Prometo donar-vos les meves solucions en el proper article.

Webs matemàtiques

L'Agulla de buffon. Un *applet* per al segle XVIII

Joan Aranès Clua

IES Martí l'Humà. jaranes@pie.xtec.es

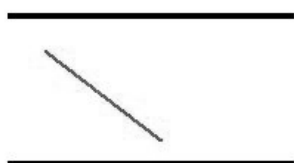
Georges-Louis Leclerc (1707-1788), comte de Buffon, d'esperit positivista i racionalista, inspirador de l'*Encyclopédie*, fou també naturalista i filosof, a banda de ser també un bon matemàtic.

El 1777, el comte de Buffon es plantejà el següent problema: *En un pla en el qual es dibuixen rectes paral·leles distanciades totes elles una distància L es llança una varnilla o agulla de longitud l ($l \leq L$). Quina és la probabilitat que l'agulla intersekti alguna de les rectes?* El resultat remarcable és que la probabilitat és proporacinal al nombre pi. S'estableix d'aquesta manera un bell lligam entre la geometria i la probabilitat.

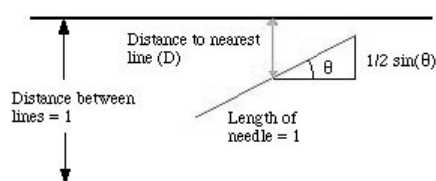
George Clifford Reese (<http://www.mste.uiuc.edu/reese/reese.html>, Universitat d'Illinois, USA) és l'autor d'aquesta interessant pàgina dedicada al problema emblemàtic de la probabilitat geomètrica: *Buffon's Needle. An Analysis and Simulation*: <http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/buffon.html>

Buffon's Needle An Analysis and Simulation

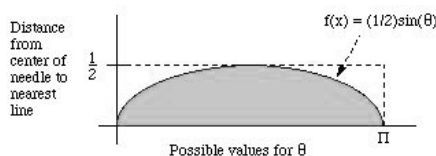
by
George Reese



Si, per simplicitat, considerarem que la longitud de l'agulla, així com la distància entre les línies paral·leles és igual a la unitat i, tenint en compte que la distància perpendicular entre el centre de l'agulla i una de les línies



és igual a $(1/2)\sin \theta$, és clar que caldrà integrar la funció $(1/2)\sin \theta$ entre els dos extrems del recorregut angular (de 0 a π , en radians), per calcular la "quantitat d'àrea que correspon al fet que l'agulla toqui una de les línies", tal com mostra la següent figura:

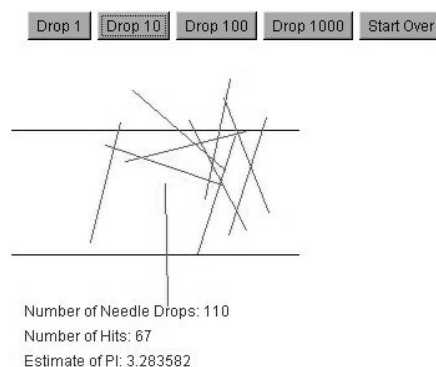


El resultat d'aquesta integral definida (el valor l'àrea acolorida de la figura) és igual a 1. Com que l'àrea del rectangle on s'inscriu és de $\pi/2$, deduïm, fent el quocient entre les àrees, que la probabilitat que un "punt" qualsevol (escollit aleatòriament), estigui dins l'àrea de color val $2/\pi$. Aquesta és la probabilitat que l'agulla, llençada a l'atzar, caigui tocant una de les línies.

Tan sols ens queda, ara, pensar a fer un recompte del nombre de vegades que l'agulla toca una línia per connectar la geometria amb la probilitat: el quocient entre el nombre de llançaments i el nombre d'aquests que l'agulla toca una línia haurà de ser igual a $2/P$. Per descomptat, la llei dels grans nombres es verificarà de manera satisfòria quan el nombre de llançaments sigui prou gran. Naturalment, sempre hi haurà un error, si volem "mesurar" el nombre P i més, tractant-se de les matemàtiques de l'atzar.

Llençar una agulla de veritat pot ser una mica avorrit, però, si simulem numèricament el llançament... Vet aquí la raó de l'*applet* que aquest número de Biaix us he volgut presentar: <http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html>.

La següent figura il·lustra el resultat per a 110 llançaments.



Per la poca precisió del resultat (P^a 3,28) deduïm que el nombre de llançaments hauria de ser més gran, oi? Doncs, au, només cal canviar el paràmetre corresponent i... a jugar, a reflexionar i pels amants de la computació, potser s'escau fer un petit programa. Us animeu?



Subscriu-t'hi

Col·labora-hi

e-mail: biaix@elistas.net

www.ice.urv.es/apmcm/biaix.html

Materials

Aritmètica mental i calculadora¹

Misericòrdia Nomen Xatruch

IES. Salvador Vilaseca

Introducció

El desenvolupament de la informàtica, l'augment d'equipament informàtic dels centres educatius i la presència d'ordinadors domèstics està generalitzant l'ús de la informàtica educativa i d'usuari. Internet s'està convertint en l'eina de consulta, divulgació i comunicació per excel·lència.

Aquest desenvolupament genera moltes expectatives i canvis en l'ensenyament, i en particular en l'ensenyament de les matemàtiques.

Es disposa de suggestius programes que serveixen per exercitar, visualitzar o calcular, per treballar la geometria de forma interactiva, per calcular dades estadístiques i representar-les, els nous applets com eines interactives de fàcil utilització.

Les aportacions de la informàtica a l'ensenyament de les matemàtiques, encara que puguin semblar puntuals, suposaran, quan siguin totalment accessibles i estiguin presents, més que el llibre de text a l'aula i canvis de continguts i de mètodes.

Existeixen no obstant eines accessibles ja, les calculadores científiques, gràfiques o simbòliques. Potser són més discretes i generen el temor que els alumnes perdran les poques destreses de càlcul que tenen, aquest temor provoca alguna resistència del professorat a la seva generalització.

Els alumnes disposen d'elles i el seu aprenentatge i aprofitament és una circumstància valuosa per treballar les matemàtiques d'una forma més atractiva i visual.

La resolució de problemes, la intuïció geomètrica, el càlcul mental o qualsevol dels temes que avui dia ocupen l'activitat matemàtica són

presentes amb l'ús de les noves tecnologies i complementen la feina a l'aula.

Importància del càlcul mental

Alguns textos consideren l'aritmètica mental com un apartat independent de les matemàtiques, no com un inici d'altres algorismes.

Ara bé és indiscutible el benefici que suposa per als alumnes la familiaritat amb el càlcul mental i que al calcular mentalment es desenvolupen algorismes mentals propis. És fonamental doncs, treballar el càlcul mental i aconseguir que els alumnes puguin per exemple sumar amb facilitat números fins a cent o multiplicar per dos dígits.

El càlcul mental no és incompatible amb l'ús de la calculadora. És cert que resulta incòmode veure a un alumne agafar la calculadora per fer un càlcul simple però és raonable combinar el càlcul mental amb l'ús de la calculadora. Operacions amb cinc dígits o arrels quadrades són més còmodes i fiables amb la calculadora.

L'interès en la pràctica d'alguns algorismes és relatiu. La repetició de l'algorisme de l'arrel quadrada acaba sent mecànica i memorística.

El temps que requereix interioritzar i realitzar aquests càlculs es pot dedicar a reforçar els conceptes. Les activitats poden guiar-se a facilitar la manipulació dels números utilitzant els algorismes i les possibilitats que incorporen les calculadores.

La calculadora resulta necessària

Les calculadores gràfiques que han estat dissenyades per facilitar el càlcul i la representa-

(1) Comunicació presentada a les X Jaem. Saragossa, setembre de 2001.

ció gràfica, en l'ensenyament faciliten l'aprenentatge de les matemàtiques.

A la seva capacitat de visualització i de càlcul s'afegeix l'accessibilitat. Això les converteix en mini-pissarres interactives i en finestres obertes al món de les matemàtiques.

Són eines educatives potents, però són encara poques les aules on la seva integració és un fet habitual, tant en el que es refereix a la modificació dels continguts com a la metodologia de les classes.

Les calculadores gràfiques faciliten les explicacions i la pràctica del que es coneix com les matemàtiques tradicionals. Permeten aproximacions pedagògiques que faciliten la representació de problemes numèricament i gràfica.

Set de cada deu joves disposa de mòbil i els sociòlegs troben positiu aquest fet. No seria lògic que set de cada deu estudiants disposés d'una calculadora gràfica i els professors aprofitessin aquest fet per un aprenentatge més atractiu de les matemàtiques?

És imprescindible utilitzar les eines que actualment estan al nostre abast.

A continuació es presenten alguns exemples de com treballar els números i com treballar amb números en la secundària.

Operacions, prioritats i aritmètica

La pissarra, el paper o la pantalla permeten treballar i calcular de forma interactiva o descobrir la geometria. La pantalla de l'ordinador pot convertir-se en un micromón amb totes les propietats geomètriques.

La calculadora també permet apreciar les propietats dels números, la seva pantalla es converteix en una pissarra viva on poder realitzar accions matemàtiques o investigar propietats. Permet comprovar les prioritats i propietats en les operacions, l'ús correcte dels parèntesi, les relacions entre les fraccions i els decimals, els tipus de decimals, la generació de números irracionals i l'aritmètica dels números complexos.

Les següents seqüències corresponen al càlcul amb fraccions, a diferents tipus de decimals, a

l'aproximació del número π i a l'aritmètica complexa.

$3+2 \cdot 1/3$ Ans $\rightarrow$ 3.666666667 Ans $\rightarrow$ Frac $11/3$	$18/40$ $.45$ $11/12$ $.9166666667$ $7/3$ 2.333333333
π 3.141592654 Ans $\rightarrow$ -3.141592654 $-4.102 \cdot 10^{-10}$	$\sqrt{-1}$ i $(1+i)(1-i)$ 2 $(1+i)^2$ $2i$

Successions de números

Des de la pantalla principal de la calculadora és possible generar mitjançant processos de recurrència successions de números. Proporciona elements per estudiar les seves regles de formació, la seva simbolització i la seva representació gràfica.

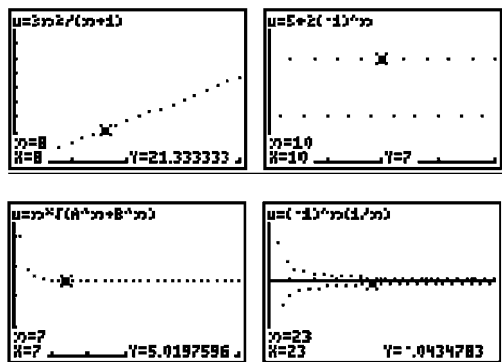
És possible observar el creixement d'una progressió geomètrica, com les successives arrels quadrades d'un número tendeixen a la unitat, com s'obté el número e , i com s'obté el número auri a partir de la successió de Fibonacci sols polsant successivament la tecla d'entrada.

1 $2 \cdot \text{Ans}$ 2 4 8 16	$\sqrt{\text{Ans}}$ 1.414213562 1.189207115 1.098587733 1.044227782 1.021897149 1.010889286
$1 \rightarrow n$ $n+1 \rightarrow n: (1+1/n)^n$ 2.37037037 2.44140625 2.48832	$1 \rightarrow N$ $N+1 \rightarrow N: u(N)/u(N-1)$ 1 1.5

La representació gràfica de successions a partir del el seu terme general, dóna idea dels diferents tipus de convergència de les successions de números.

A més de les regles mecàniques per obtenir el límit de la successió convé parlar atenció i bus-

Els exemples següents sobre successions mostren una que tendeix a l'infinit, una altra alternada i dos tipus diferents de convergència.



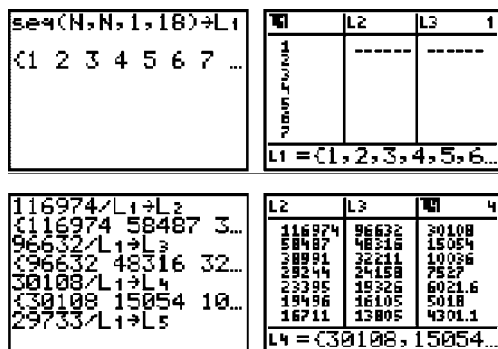
En ocasions convé treballar els números en bloc, col·locar les dades en forma de llistes i calcular de forma similar a un full de càlcul.

Es divideix el número de vots de cada partit pels sencers de l'1 al número d'escons a elegir, una vegada feta aquesta divisió s'atorguen els càrrecs de representació als partits o coalicions que obtenen el número més alt de quocients, d'aquesta manera fins a esgotar tots les representacions.

En les últimes eleccions al Parlament de Catalunya, octubre del 1999, els resultats en la circumscripció de Tarragona van ser els següents:

CiU	116.974
PSC-CC-IC-Verds	96.632
PP	30.108
ERC	29.733

Per fer el repartiment dels 18 escons que corresponen a la circumscripció s'introdueixen a la calculadora els números de l'1 al 18 a la llista L1. Les llistes L2, L3, L4 i L5 seran els quocients corresponents als quatre partits que poden obtenir representació parlamentària.



Obtinguts els quocients es fan els repartiments. El primer diputat correspon a la llista L2, el segon a L3, el tercer a L2, i així successivament fins a l'últim que correspon a la llista L2. Pot passar que l'últim escó sigui assignat per una diferència molt petita de vots, en aquest exemple per una diferència de 817 vots la llista L2 va obtenir el seu vuitè escó per davant de la llista L3.

	L2	L3	L4	L5
1	116974	96632	30108	29733
2	58487	48316	15054	14867
3	38991	32211	10036	9911
4	29244	24158	7527	7433
5	23395	19326	6022	5947
6	19496	16105	5018	4955
7	16711	13805	4301	4248
8	14622	12079	3763	3716
9	12997	10737	3345	3304

Els números i l'atzar

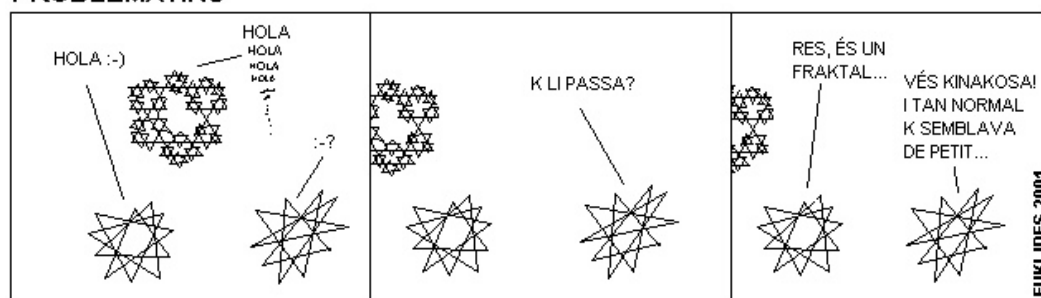
La calculadora gràfica proporciona i genera números aleatoris. La seva representació gràfica ajuda a simular experiments d'atzar.

Per simular el llançament d'un deu es generen números sencers compresos entre 1 i 6. Això es pot repetir un número determinat de vegades, comptar la freqüència de cada cara i representar-lo en un diagrama de barres.

La representació gràfica mostra la freqüència de cada cara. Si es repeteix l'experiment amb un número major de llançaments la tendència és que les freqüències s'igualaran. A partir d'aquestes dades poden calcular-se les freqüències relatives i introduir el concepte de probabilitat teòrica que un succés es realitzi.



PROBLEMATIKS



Cròniques

Crònica de la jornada del *Fem Matemàtiques* 2002 a Poblet (Fase Catalana)

Joan Aranès Clua

IES. Martí L'Humà. jaranes@pie.xtec.es



(foto: José Rey)

El dissabte, 11 de maig, a les nou del matí, acompanyats de professors i familiars, van començar a arribar al Camp d'Aprenentatge dels Monestirs del Cister, a menys d'un quilòmetre del Monestir de Poblet, els 54 noies i noies classificats per a la tercera fase del concurs *Fem Matemàtiques* 2002, representants de les demarcacions corresponents a les cinc associacions federades que integren la FEEMCAT: APMCM, ABEAM, APAMMS, ADEMG i SEMG i que, provenen de gairebé totes les comarques catalanes.

El concurs *Fem Matemàtiques*, organitzat per la FEEMCAT, es dedica als estudiants de 6è de Primària, 1r i 2n d'ESO. La present edició, en el curs 2001-2002, ha tingut com a escenari el monestir de Poblet (Conca de Barberà) que juntament amb els monestirs veïns de Santes Creus (Alt Camp) i Vallbona de les Monges (Urgell) representa un valuós patrimoni històric i monumental; això, afegit al fet que a tots tres monestirs els envolta una magnífica naturalesa, garanteix agradables i calmoses sorpreses al visitant. De forma rotativa, cada any, la

FEEMCAT encomana la coordinació del concurs així com la preparació de la tercera fase a una de les seves cinc entitats de associades; enguany correspon a l'APMCM tenir-ne cura.

La recepció es va muntar al Camp d'Aprenentatge dels Monestirs del Cister, les instal·lacions del qual estan costat per costat de les de l'Alberg Jaume I. Ambdues instal·lacions es complementen molt bé en l'oferta de serveis que donen als grups d'estudiants que visiten aquesta zona tan rica en cultura i en naturalesa. Trobem el camp-alberg a la carretera de les Masies, entre l'Espluga de Francolí i el Monestir de Poblet. El dia va començar ennuvolat, amb la temença generalitzada que la pluja espatllés les proves pràctiques previstes per fer-les a l'exterior del monestir, davant les monumentals torres hexagonals. Al capdavant, tot i que el cel, a estones, tapava les clarianes i tornava a un color gris, la temuda pluja no aparegué sinó al voltant de les vuit del vespre, quan la jornada feia estona que havia finalitzat i ja només quedàvem els organitzadors prenent cafè al bar que hi ha al costat de la carretera, davant el portal que dona accés al recinte del monestir.

De bon matí, els participants, així que arribaven i s'anaven acreditant en la recepció, anaven passant al pati del camp-alberg, i a poc a poc, s'anava animant: professors que es retrobaven i acompanyants i participants conversant animadament. Vint minuts abans de les deu, tothom començà marxar cap a l'Espluga per participar a l'excursió a la Cova de la Font Major: una visita guiada a la formació geològica i aixopluc prehistòric que dóna nom tant a la vila de l'Espluga de Francolí, com al mateix riu Francolí, situada a l'entrada de la vila, i a uns tres quilòmetres del camp d'aprenentatge. Alguns participants, per inconvenients degudes al transport, varen arribar una mica més tard i és per això que la rebuda formal no es donà per feta fins que a les 11.45 h, després que es servís l'esmorzar sota els porxos del camp d'aprenentatge; tothom s'havia reunit ja al pati de l'alberg per escoltar les explicacions que els organitzadors van fer sobre la jornada matemàtica que començava a tenir lloc.

A les 12.00 h, els participants varen entrar a les aules taller per les portes dels porxos i, en un ambient recollit, envoltats de maquetes que simulen les construccions de l'arquitectura medieval, s'anaven concentrant en la tasca de resoldre problemes individualment, destorbats solament, en començar, per algun llampec de llum provinent d'alguna màquina de fotografar. A les 14.00 h es donà per acabada la prova individual i tothom començà a pujar els esglaons que donen al menjador de l'alberg. Hi havia gana i força bon humor, tot i que el cel

continuava tapadot i tothom es temia que d'un moment a l'altre comencés a ploure. A les 15.00 h vàrem començar a fer via cap al monestir per realitzar la prova pràctica que començaria a dos quarts de quatre i es donaria per acabada a les cinc de la tarda sense que els núvols amenaçadors haguéssin deixat caure ni una sola gota, la qual cosa hagués entorpit, les mesures indirectes de torres tot valent-se de miralls, localitzar els centres dels trassos d'arc dels pòrtics entre d'altres activitats que reclamaven continuament la presència dels visitants encuriosits. En cacabar la prova pràctica, començà tot seguit la visita al monestir; els guies varen captar sense gaire dificultat la curiositat dels joves a redòs del claustre, la sala capitular, el refectori, el locutori i d'altres peces de l'edifici on regna el silenci i la serenitat. Finalment, a un quart de set, tothom es reuní a la sala de conferències del recentment restaurat Palau de l'Abat. La sala, de seguida, s'emplenà de gom a gom: familiars, participants, professors i amics, sense oblidar els periodistes que captaven la notícia que l'endemà apareixeria als diaris, a més a més d'alguns turistes que engrescat per la calidesa i amabilitat de l'ambient també es va afegir a l'espectacle de l'acte de cloenda. Al llarg de l'acte, es va fer lliurament de diplomes de participació, premis i records a tots els participants i professors responsables de cada demarcació i es designà els participants de 2n d'ESO classificats com a representants de la FEEMCAT a l'Olimpiada Matemàtica que aquest estiu es celebrà a Cadiz.

RELACIÓ DE PARTICIPANTS CLASSIFICATS A LA FASE FINAL (Poblet, 11 de juny de 2002)

	PROVA INDIVIDUAL	PROVA PRÀCTICA PER EQUIPS
NIVELL 1	Eva Jurado Aguaron. CEIP Pegaso. Barcelona. Laura Puiggrós .CEIP Migdia. Girona Sara Víctor Fernández. Escola Proa. Barcelona	Laura Puiggrós. CEIP Migdia. Girona Núria Andrés. Col. Pare Manyanet. Barcelona Artur Sampere. CEIP Pérez Sala. Vilassar de Mar.
NIVELL 2	Daniel Silva Sanz. IES Bernat Metge. Barcelona Pere Lozano. Col. Sant Pau Apòstol. Tarragona Berta Villaró Lupon. Escola Sadako.Barcelona	Laura Izquierdo. Col. Sagrat Cor. Vic Guillem Bradàriz. Escola Pia. Barcelona Daniel Carracelas. IES Josep Pla. Barcelona Ainoa Eusebio. IES Narcís Xifra. Girona
NIVELL 3	Flàvia Gómez Ferreras. IES Joan Pelegrí. Barcelona Marc Viñals.IES Palamós. Palamós Gerard Planas. IES Manuel Blancafort. La Garriga	Aitor López. IES Can Puig. Sant Pere de Ribes Pau Bajet. Escola Sadako. Barcelona Meritxell López. IES Apel.les Mestres. Hospitalet de Llobregat Núria Zurita. IES Narcís Oller. Valls

Crònica del V simposi sobre aportacions de la didàctica de la matemàtica a diferents perfils professionals

Núria Planes

Universitat Autònoma Barcelona. Nuria.Planes@uab.es

Els dies 7, 8 i 9 de febrer de 2002 es celebrà a la Universitat d'Alacant el "V Simposi sobre Aportacions de la Didàctica de la Matemàtica a diferents Perfils Professionals". Aquest Simposi va ser un autèntic fòrum de debat sobre les diverses necessitats que plantegen tant la docència com la investigació, així com sobre els aprenentatges dels diferents tòpics matemàtics i de didàctica de la matemàtica que configuren o haurien de configurar el currículum universitari de diferents perfils professionals. Amb aquest propòsit, es varen reunir matemàtics, professors de matemàtiques d'educació secundària, psicopedagogs, mestres, enginyers, estadístics i economistes, entre d'altres. Es varen acomplir, doncs, les expectatives del Comitè Organitzador que assumia el relleu del IV Simposi celebrat el febrer de 2000 a la Universitat d'Oviedo.

Vuit preguntes clau organitzaren els diversos debats: epistemologia i història; tanteig i creativitat; imaginació i percepció; experiència i teoria; afectivitat i matemàtiques; caràcter multicultural de les matemàtiques; aprenentatge de conceptes/nocions matemàtiques; i, per últim, aprenentatge de conceptes/nocions de didàctica de la matemàtica. Les Actes del Simposi contenen una important varietat de treballs, ja siguin d'investigació, d'innovació o de reflexió, que certifiquen la multiplicitat de focus d'atenció representats pels professionals dedicats a la didàctica de la matemàtica. Alguns d'aquests treballs suposen una mostra dels debats simultanis que estan tenint lloc a moltes universitats espanyoles al voltant de les

necessitats en la formació del professorat dels diferents nivells educatius. En aquest sentit, les reflexions sobre què pot aportar la didàctica de la matemàtica a la formació de matemàtics per a les seves diverses sortides professionals foren, segurament, les que centraren en major mesura l'interès dels participants. Cal destacar la presentació de l'estat actual del projecte Edumat-Maestros realitzada pel professor Juan Díaz Godino, artífex juntament amb el seu equip de la Universitat de Granada del projecte.

A més, hi hagué d'altres àmbits d'atenció amb una forta representació, tals com la importància del camp afectiu dins l'educació matemàtica. Foren revisades diferents investigacions centrades en aspectes de tipus afectiu des d'una perspectiva sociocultural. Es reflexionà sobre com els alumnes desenvolupen la seva identitat com aprenents de matemàtiques en implicar-se en diverses comunitats de pràctiques. Per altra banda, s'analitzaren qüestions de comunicació des d'un doble enfocament: com un recurs social usat en el procés de compartir significats i com un vehicle en la construcció del coneixement matemàtic. Unint la preocupació per les competències bàsiques a desenvolupar i el domini afectiu, també es va parlar de la implicació de l'educació matemàtica en la formació de professionals per a una societat democràtica. El debat entorn al caràcter fonamental de la competència matemàtica en tant que competència democràtica va posar de manifest l'interès incipient per la dimensió social dels diferents contextes de pràctica matemàtica.

Crònica del VI Simposi de la Sociedad española de investigación en educación matemática (SEIEM). Logroño, setembre 2002

Núria Planes

Universitat Autònoma Barcelona. Nuria.Planes@uab.es

Com ja va sent habitual des de l'any 1997, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) ha dut a terme la seva reunió anual. La darrera cita de la SEIEM va ser de l'11 al 14 de setembre (http://www.ugr.es/~seiem/VI_Simposio.htm) a Logroño. En aquesta ocasió, el programa científic va incloure les següents activitats: (1) Investigació sobre l'activitat matemàtica a l'aula, amb dos seminaris titulats "Modelització de l'activitat matemàtica i didàctica" i "Mètodes i esquemes d'anàlisi"; (2) Presentació i discussió d'informes d'investigació proposats lliurement pels assistents al Simposi i acceptats pel Comitè Científic, previ procés anònim de revisió; (3) Reunions dels grups d'investigació (Didàctica de la Matemàtica com a Disciplina Científica, Coneixement i Desenvolupament Professional del Professor, Aprenentatge de la Geometria, Didàctica de l'Anàlisi, Didàctica de l'Estadística, Probabilitat i Combinatòria, Pensament Numèric i Algebraic).

La SEIEM pretén contribuir a la col·laboració i l'intercanvi d'idees entre tots els investigadors dins dels diferents àmbits de l'educació matemàtica a nivell estatal. Un dels objectius és endegar projectes d'investigació conjunts en

un futur més o menys immediat. A tal efecte, els grups d'investigació es conceben com a grups oberts a totes les aportacions que puguin oferir els seus nous membres i amb una organització, uns objectius i uns temes de treball que hauran d'evolucionar d'acord amb els interessos i les necessitats dels membres del grup. D'altra banda, les activitats dels diferents grups s'organitzen de manera coordinada, permetent que una mateixa persona pugui participar simultàniament en dos grups de treball. Cal dir, però, que, com a qualsevol altra societat d'investigació, per tal de poder participar com a membre de ple dret en les activitats convocades per la SEIEM, és imprescindible ser-ne soci. La quota anual és una quantitat simbòlica que facilita, entre d'altres coses, la publicació d'unes detallades actes per a cada simposi. Com què entenem que qualsevol iniciativa d'aquest tipus és una bona notícia a favor de l'educació matemàtica, us proporcionem l'adreça electrònica de Tomás Ortega, membre de l'actual Comitè Científic i responsable de noves afiliacions: ortega@am.uva.es. Ara quedem a l'espera de l'aparició de les actes de la trobada de Logroño, que sortiran en forma de llibre sota el nom 'Investigación en Educación Matemática'.

Agenda

CERME3: Tercera conferència de la societat europea de recerca en educació matemàtica

28 febrer-3 març 2003, Bellaria, Itàlia

Núria Planes

Universitat Autònoma Barcelona. Nuria.Planes@uab.es

L'agost de l'any 1998 es va dur a terme la Primera Conferència de la Societat Europea de Recerca en Educació Matemàtica (CERME1) a Osnabrück, Alemanya (<http://www.erne.uni-osnabrueck.de/erne98.html>). El CERME2 tingué lloc el febrer de 2001 a Mariánské Lázně, República Txeca. Es consolidava, així, un nou espai de trobada d'investigadors europeus en el camp de l'educació matemàtica (http://www.pedf.cuni.cz/k_mdm/vedcin/cerm_e2frm.html). La propera cita és a Bellaria, Itàlia, l'any vinent (<http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>).

Durant el cap de setmana del 2 al 4 de maig de 1997, representants de 16 països europeus es varen trobar a Osnabrück amb el propòsit d'endegar una nova societat, la Societat Europea de Recerca en Educació Matemàtica (ERME). Es volien promoure la comunicació, la cooperació i la col·laboració dins el camp europeu d'investigació en educació matemàtica. Des d'aleshores, alguns dels objectius principals de l'ERME consisteixen en organitzar les següents activitats:

1. Conferències amb un ampli ventall de temes rellevants per a les diverses realitats europees, trobades especials de grups de treball temàtics, al voltant de tòpics concrets, i també escoles d'estiu on investigadors amb llarga experiència treballen amb investigadors novells.
2. Activitats cooperatives en relació a temes que van més enllà de contextos locals i con-

tribueixen a produir coneixements en el nostre camp d'investigació. A més, fòrums d'idees on s'indaguen àrees d'investigació emergents que puguin beneficiar-se d'un treball en col·laboració amb diferents grups de recerca a nivell europeu.

CERME3 és una conferència dissenyada amb la intenció de facilitar l'intercanvi d'experiències entre educadors matemàtics situats en contextos geogràfics, socials i culturals diversos. En aquest sentit, no es centra tant en la presentació d'estudis individuals com en la discussió conjunta de temes dins determinats grups de treball. Per a la trobada de Bellaria, estan previstos 12 grups de treball. Els grups i els seus respectius coordinadors són:

- (1) Imatges i metàfores en aprendre i comprendre matemàtiques (Bernard Parzysz)
- (2) Afecte i pensament matemàtic (Jeff Evans)
- (3) Construcció d'estructures en el coneixement matemàtic (Milan Hejny)
- (4) Argumentacions i proves (Rudolf vom Hofe)
- (5) Pensament estocàstic (Dave Pratt)
- (6) Pensament algèbric (Abraham Arcavi)
- (7) Pensament geomètric (Jean-Luc Dorier)
- (8) Interaccions socials en situacions d'aprenentatge matemàtic (Goetz Krummheuer)

- (9) Eines i tecnologies a la didàctica de la matemàtica (Keith Jones)
- (10) Ensenyant i aprenent matemàtiques a aules multiculturals (Guida de Abreu)
- (11) Interrelacionant teoria i pràctica (Andrea Peter-Koop)
- (12) De pràctiques d'ensenyament a formació del professorat (Barbro Grevholm)

Fins el 15 de setembre de 2002 hi ha temps per a inscriure's i enviar una proposta de col·laboració en algun d'aquests grups temàtics.

L'adreça dels coordinadors dels grups apareix a la pàgina web. També s'admet la presentació de pòsters. En aquest cas, el termini d'enviament de la proposta s'allarga fins el 30 de novembre. Aquesta és una bona ocasió per a conèixer el que professors de matemàtiques i investigadors universitaris estan experimentant a diferents contrades, en un ambient d'intercanvi que en les convocatòries anteriors ha resultat ser molt enriquidor. Això sí, haurem d'esforçar-nos a fer-nos entendre en anglès, o en francès, o almenys a trobar una llengua comuna amb els interlocutors.

Recensions

Àngel Alsina¹

Actividades matemáticas con niñas y niños de 0 a 6 años

Cristina Lahora

Editorial Narcea, Madrid, 2000

ISBN: 87-277-1003-8, 174 pàgines

Voldria equivocar-me en iniciar aquesta recensió afirmant que al nostre país es publiquen encara pocs llibres centrats en la didàctica de les matemàtiques a l'etapa d'educació infantil. I menys encara que incideixin explícitament en el cicle de 0-3 anys. Cristina Lahora, educadora d'escola infantil, intenta omplir aquest buit editorial aportant un ampli ventall d'orientacions específiques a les educadores i educadors de llar d'infants i de parvulari.

El llibre s'estructura en dos gran apartats: en la primera part -teòrica, breu i interessant- es fa una anàlisi del tractament de la matemàtica en el Disseny Curricular Base d'Educació Infantil del MEC (1989), que situa els continguts lògico-matemàtics en l'àrea de Comunicació i Representació, de forma semblant a com ho fa el Currículum d'Educació Infantil de la Generalitat de Catalunya (1992), que els situa en l'àrea d'Intercomunicació i Llenguatges, oblidant en part la interrelació existent amb les altres àrees (Descoberta d'un mateix i Descoberta de l'entorn natural i social). En la mateixa part del llibre, Lahora presenta un llistat molt ben elaborat al meu entendre d'actituds dels educadors que afavoreixen el desenvolupament del pensament matemàtic dels infants a l'etapa d'educació infantil. Entre aquestes actituds, l'autora destaca la capacitat de crear un clima de confiança a l'aula; donar totes les explicacions que siguin necessàries; tenir una doble senzillesa, tant per respondre a les possibilitats dels infants com per entendre que no

tots els aprenentatges venen de la mà del mestre, sinó que poden venir d'altres infants. Altres actituds que haurien de tenir els educadors d'educació infantil haurien de ser: estar sempre alerta a les possibilitats de cada infant; estimular i no censurar; afavorir les relacions dels infants o bé tenir molta paciència, entre moltes altres.

La segona part del llibre presenta diverses activitats de lògica, de càlcul, de mesura i de geometria. Les activitats es presenten estructurades per al cicle de 0-3 anys (escola bressol) i per al cicle de 3-6 anys (parvulari). Cal dir que dins el primer cicle, per als nens de 0-1 anys l'autora, encertadament, gairebé no proposa activitats específiques de l'àrea matemàtica, ja que a aquesta edat el que cal bàsicament és establir els fonaments del que posteriorment serà el desenvolupament del pensament lògico-matemàtic (satisfer la necessitat d'afecte i anar organitzant el món que envolta aquests infants).

Les activitats dels diferents blocs de contingut s'estructuren alhora per nivells, sempre de manera orientativa: 0-1, 1-2, 2-3 anys pel primer cicle, i 3-4, 4-5 i 5-6 anys pel segon cicle. El criteri metodològic general de totes les activitats es basa en la manipulació i l'experimentació de diferents materials, i de manera encertada l'autora proposa que abans d'usar un material amb una finalitat didàctica concreta es permeti als infants que tinguin un primer contacte amb el material a través del joc lliure.

(1) Universitat de Vic. angel.alsina@uvic.es

Una anàlisi més concreta de les activitats de cadascun dels blocs de contingut ens porta a les conclusions següents:

Lògica: tenint present que les dimensions del llibre no permeten un aprofundiment exhaustiu, es fa incís en el fet indiscutible que el pensament lògico-matemàtic es va adquirint de manera progressiva a través de l'educació sensorial. Es proposa l'ús de materials diversos, tot i que a l'escola bressol es prioritza sobretot el material sensorial Montessori (torre rosa, barres vermelles, encaixos sòlids, ...) i a parvulari els blocs lògics de Dienes.

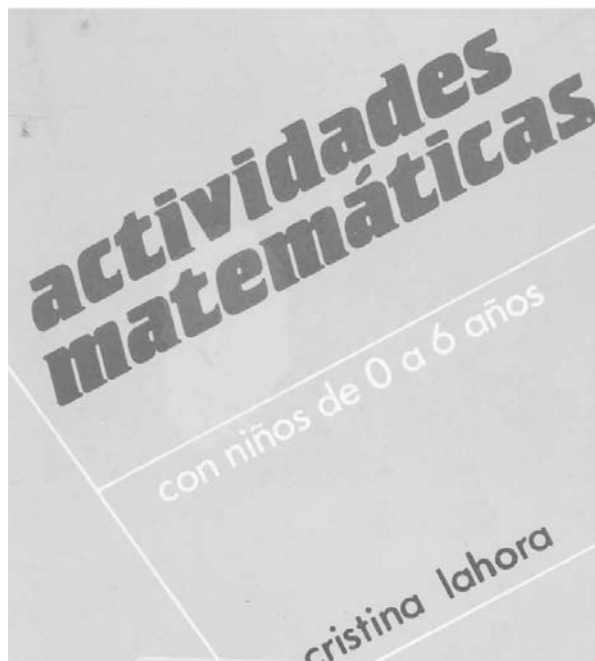
Càlcul: un dels encerts d'aquest apartat és que no va de cara al número escrit, sinó que el propòsit de la major part de les activitats plantejades es permetre la construcció sòlida de la noció de nombre a través de la identificació, la comparació i l'ordenació de quantitats. Per aconseguir aquest propòsit, es parteix entre altres de diversos jocs de dòmino, bingo, ...i novament del material Montessori: barres, plaques i cubs. Proposa també l'ús de l'àbac per

entendre el valor posicional dels nombres, al nostre entendre una mica prematurament.

Mesura: en aquest apartat es donen de manera breu alguns consells per assolir alguns conceptes primaris a l'escola bressol (sobretot ple/buit), i per iniciar-se en la mesura d'instruments a parvulari (sobretot balança i cinta mètrica).

Geometria: en aquest darrer apartat del llibre es proposen algunes activitats per a l'adquisició de nocions com dins/fora, el coneixement de les figures, les simetries, etc., que es poden complementar amb altres propostes didàctiques existents.

Globalment, doncs, es tracta d'un llibre útil per les seves possibilitats d'aplicació immediata a les aules d'educació infantil. Tanmateix, de tot plegat voldria destacar-ne sobretot el fet que dóna a conèixer algunes possibilitats per treballar la matemàtica a l'escola bressol, un cicle que ha estat massa temps a la reraguarda del món educatiu en general i de la didàctica en particular, però que té una importància cabdal.



Pere Roig i Plans¹

El Projecte Solaris, una col·lecció de novel·les científiques. Editorial Eumo

Les quatre novel·les que us ressenyem formen part del Projecte Solaris, col·lecció de novel·les científiques, dirigida a la gent jove, que pretén col·laborar en la superació de l'actual i greu divorci entre la ciència i l'humanisme.

Cada novel·la està dedicada a un tema científic, concret, extret de la Física, la Biologia, la Matemàtica, etc. de manera que el/la lector/a, a mesura que avança en l'argument de la novel·la, va avançant, simultàniament, en l'aprenentatge del contingut científic. Només la comprensió definitiva d'aquest contingut li permetrà poder desfer, finalment, l'entrellat, el nus, de la novel·la.

El Projecte Solaris està lligat, des dels seus orígens, amb la Matemàtica. En efecte, aquesta col·lecció va néixer del meu neguit, com a professor de Matemàtica, per tal d'aconseguir transmetre als alumnes l'importància de saber distingir entre els conceptes i llur representació. Molts dels mals de cap que pateix el professorat a les aules s'originen, al meu entendre, en no respectar la seqüència didàctica **realitat-representació-símbol** en l'aprenentatge de qualsevol fet o concepte. El contingut científic de la primera novel·la d'aquesta col·lecció és, precisament, "els nombres i la seva representació". Aquesta novel·la es pogué enllestir gràcies a la col·laboració, com a coautor literari, de l'amic Jordi Font, una barreja, ben aconseguida, d'escriptor i tecno-científic. L'acceptació per part de l'Editorial Eumo de

seguir publicant altres novel·les amb aquest enfoc interdisciplinari ha permès arribar a l'actual situació: 24 novel·les publicades, referides a temes de quasi totes les ciències (el canvi químic, la proporcionalitat, les infeccions i la resposta immunitària, els circuits elèctrics i electrònics elementals, l'impacte dels incendis forestals, les roques, etc. etc.)

Al final de cada novel·la hi ha una Guia didàctica, curosament elaborada pel mateixos autors, que permet al professorat, acabar de treure tot el profit possible de la seva lectura, i aprofundir en l'aprenentatge del corresponent contingut científic.

Les quatre noveles publicades fins ara que més relació tenen amb les matemàtiques són:

- **Apín capon zapun amanicà (1134)** (Pere Roig i Jordi Font). Per entendre el nombre i les seves representacions.
- **Chapeau pels iaaios!** (Joan Tardà i Maria Corominas). Per entendre la proporcionalitat.
- **A punt de fuga** (Josep Lluís Muñoz i Mercè Rosés). Per entendre la perspectiva.
- **L'encàrrec del vell Hayyam** (Víctor Rotger). Per entendre les representacions gràfiques.

Properament s'en publicarà una sobre les matrius.

(1) proig@pie.xtec.es

Llicències d'estudi:

Curs 99/00¹

Juanjo Cárdenas. CEIP Font de l'Alba. jcardena@pie.xtec.es

El programa CalculaV. Entorn informàtic per a l'aprenentatge heurístic i cooperatiu en l'àrea de matemàtiques a l'ensenyament secundari.

Ramon Capsada Blanch

CalculaV és un programa informàtic per l'ensenyament de les matemàtiques. El seu nom vol ser una abreviatura de Calcula dins d'un context visual, i aquesta és la seva finalitat principal: poder realitzar càlculs, en sentit ampli, dins d'un entorn operatiu basat en la immediatesa dels objectes visuals i de les accions directes fetes amb el clic del ratolí.

Ha estat desenvolupat utilitzant el llenguatge de programació C++ i utilitza la tecnologia MDI (Multiple Document Interface); això vol dir que es poden crear varis documents que apareixen en finestres separades dins de la finestra principal del programa. Cada un d'aquests documents se li dona el nom de Full de treball.

En cada un d'aquests fulls de treball es poden crear diferents tipus d'objectes: operacions, números variables, textos, gràfics, algorismes i objectes de dibuix geomètric (punts, segments, rectes i circumferències). Aquests objectes es poden interrelacionar entre ells: les operacions poden contenir números variables o bé mesures de segments, els gràfics es basen en un número variable i en una operació, en els textos s'hi poden inserir resultats d'operacions i números variables i, on pren més significat aquesta relació d'objectes és en la creació d'algorismes ja que en aquest cas apareixen operacions amb números variables, bifurcacions i repeticions.

Un full de treball pot ser transmès de manera directa a qualsevol altre ordinador que estigui connectat a la xarxa local i que estigui també fent funcionar, en el moment de la transmissió, el programa CalculaV.

"TRES,SIS,NOU": organització de l'aula amb alumnes de diferents nivells d'aprenentatge

Núria Carazo Torres

El treball vol ser un ajut a tots els professionals que treballen amb classes conflictives amb problemes familiars i afectius on es concentren alumnes amb diferents dificultats i nivells d'aprenentatge.

Es tracta d'analitzar els continguts i objectius del primer, segon i tercer nivell de concreció i adaptar-los al grup-classe, elaborant una sèrie d'activitats graduades (amb tres graus de dificultat), de manera que permeti a l'alumne treballar segons les seves capacitats.

El treball pretén oferir un llistat de tots els materials existents en l'àrea de Matemàtiques i oferir també diferents formes de flexibilització dels grups i d'organització de l'aula.

Objectius:

- Donar les característiques bàsiques que comporta una actuació dins d'una aula amb diferents nivells d'aprenentatge.
- Elaborar un material didàctic específic que permeti treballar els continguts referents a la Matemàtica dins de l'Educació Primària de la manera més pràctica possible. Realització de la seqüenciació de continguts.

(1) <http://www.xtec.es/~qcastell/armilar/portada.htm>

- Dissenyar activitats d'ensenyament –aprenentatge adequades a cada nivell.
- Veure les diferents possibilitats d'organització d'aula; des d'aspectes físics com distribució de mobiliari, ambientació de la classe, etc... fins a aspectes metodològics per tal d'aconseguir una millora en la qualitat d'ensenyament.
- Buscar fòrmules d'agrupament d'alumnes dins i fora de l'aula. Trobar formes organitzatives de l'aula quan treballem en el grup-classe.
- Conèixer els tipus de dificultats que presenten els alumnes. Només coneixent detalladament els seus desenvolupaments i comprènent on es troba la mancança ens permetrà construir noves activitats i els podrem ajudar a millorar la seva capacitat de treball.
- Oferir als ensenyants un ventall de possibilitats en relació al material matemàtic existent al mercat, analitzat i classificat per cicles, per blocs temàtics, graus de dificultat...)
- Elaborar material didàctic per atendre a la diversitat dels alumnes.

Recursos Internet per a l'ensenyament de les matemàtiques: la web ARMILAR

Joaquim Castellsaguer i Guanyabens

La memòria consta de 19 pàgines. Com annexos escrits s'acompanyen la llista de títols i els esquemes de classificació. En un disquet s'annexa la web ARMILAR en un fitxer comprimit.

- És una antologia, és a dir, un recull d'ítems, en aquest cas de pàgines web, seleccionades d'acord amb l'interès i l'opinió personal del seu antòleg. No és una enciclopèdia que pretengui abastar tot el món de les matemàtiques a Internet. És ben clar que aquesta és una tasca impossible.
- Es refereix a recursos de matemàtiques, precisament per a l'ensenyament secundari. No conté, doncs, pàgines que siguin primordialment útils ni valuoses per a un matemàtic professional, ni tan sols quan aquest exerceix la docència. Intenta, més aviat, proporcionar

materials de tipus i grandàries molt diferents, però dels quals es pot extreure alguna idea o línia de treball per a l'ensenyament.

- Els recursos han estat llegits, anotats i recomanats. No es tracta, doncs, d'una de les freqüents recopilacions d'enllaços pràcticament sense recolzament que tant abunden a Internet. Aquests procuren adreçar-se a temes concrets, a vegades pàgines extretes de webs més àmplies; estan analitzats, categoritzats temàticament, i recomanats per al seu ús en un nivell i unes situacions pedagògiques determinades.

Aula virtual de matemàtiques

J. Carlos Gete-Alonso Calera

Creació d'un espai a la xarxa (INTERNET) que pugui ser utilitzat com instrument didàctic a l'ensenyament / aprenentatge de les matemàtiques en els nivells educatius de la ESO.

El disseny i adaptació de materials curriculars de matemàtiques per l'ensenyament/aprenentatge s'ha de condicionar a les possibilitats de la plataforma escollida. Per aquest motiu, el treball s'ha centrat en la tipificació d'accions d'aprenentatge susceptibles de ser controlades informàticament.

El projecte té una doble vessant. Una consisteix en la creació d'una aula virtual, un espai d'ensenyament/aprenentatge dins de Internet; l'altra està relacionada amb la matèria específica que s'ha d'aprendre en aquesta aula : les matemàtiques.

AULA VIRTUAL: La tasca principal consisteix en l'estudi de plataformes d'ensenyament/aprenentatge ja existents (concretament: JLE i diferents campus digitals de les Universitats). Tanmateix se estan definint les funcions que haurà de tenir aquest espai en tres vessants: gestió, comunicació i ensenyament/aprenentatge. De manera especial es treballa en la possibilitat de crear itineraris d'aprenentatge que s'adaptin a les necessitats de cada alumne. De moment, els materials existents són hipertextos que desenvolupen linealment uns continguts.

(i) Les llicències d'estudi corresponents a aquest curs les podem trobar a (<http://www.xtec.es/sfgp/licencias/199900/resums/llista9900.html>)

Salutació de la nova Junta de FEEMCAT

En primer lloc voldria donar les gràcies a l'anterior Junta de FEEMCAT per totes les activitats desenvolupades i per la qualitat de les jornades i activitats sobre l'ensenyament de les matemàtiques que han realitzat en diverses comarques catalanes.

Vull també compartir l'engrescament pel noble ofici d'educar mostrat per l'anterior Junta i assumir ja des d'ara els errors que puguem fer la nova Junta. El compromís de FEEMCAT és continuar potenciant totes les tasques que s'han materialitzat fins ara.

Estem satisfets de poder oferir un nou número de BIAIX, que amb l'esforç de tots anem consolidant dia a dia i que des de FEEMCAT i amb l'equip de redacció anirem enfortint per tal que BIAIX sigui realment el portaveu de la comunitat educativa del nostre país. També vull agrair l'esforç realitzat per l'equip que configura BIAIX, pel seu entusiasme i treball en potenciar aquesta revista. Gràcies a tots i a totes per la bona feina desenvolupada i ben feta.

Voldria encoratjar que cada any fóssim més i manifestar la satisfacció d'observar com els moviments formats per les persones que estimem les matemàtiques i el seu ensenyament anem creixent. BIAIX està obert a tots els suggeriments i articles, us volem animar que presenteu aportacions i experiències que heu realitzat als centres, tant si són d'un nivell educatiu de primària o d'universitat.

En l'educació matemàtica, a qualsevol nivell, estem en processos de canvis, de debats i d'incerteses. Avui hi ha un gran debat sobre el que

cal fer i el que no cal fer. Sovint, a les escoles, encara valorem poc factors decisius en la formació dels joves, com ara pensar abans d'actuar, tenir iniciativa pròpia, fer descobertes o trobar estratègies; i en canvi, potser valorem massa bé les operacions aritmètiques i les rutines o fins i tot l'obtenció d'un resultat exacte. Kant ja apuntava *"el coneixement humà comença amb intuïcions, després passa als conceptes i acaba amb les idees"*.

El missatge a transmetre és que *les matemàtiques poden ser útils i atractives*. Voldria plasmar el sentiment de què vol dir fer i ensenyar matemàtiques. Ensenyar matemàtiques no és realitzar un seguit de rutines, ni fer més temes, és en tot cas oferir més idees i més creativitat; fer matemàtiques és una manera de pensar i de viure; recordem que en el discurs tradicional educatiu A. Einstein no era "brillant" en matemàtiques, ni tampoc ho era Antoni Gaudí!!!. Si parlem en clau innovadora i amb mentalitat oberta, tots els lectors podem reflexionar i notar que veritablement el fet de ser brillant no vol dir precisament l'aprenentatge de rutines repetitives. En síntesi, fer i ensenyar matemàtiques és una manera de mirar el món que ens envolta, ensenyar matemàtiques forma part de l'educació i formació de ciutadans destacant la component humana de les matemàtiques i despertant l'esperit crític tot fomentant el debat i el treball en grup.

A tots els que mai han sentit gust per les matemàtiques i que en tenen un record llunyà, els desitjem que mirin el món matemàticament, crec que d'aquesta manera podrem aconseguir un món millor, més just i més solidari.

Com a FEEMCAT tenim projectes emparaulats i d'altres d'encetats, alguns d'ells són la possible edició del projecte "*detecció del talent precoç en matemàtiques*", els "*premis M.A. Canals*", perspectives sobre el futur del CEM, reformar els estatuts, col·laboracions puntuals amb la Societat Catalana de Matemàtiques, impulsar positivament el *Fem Matemàtiques*,... i moltes més coses que sense l'ajut incondicional vostre no les podrem fer possibles. En el proper número de BIAIX esperem poder-vos ampliar aquestes propostes i explicar-vos el seu desenvolupament.

De moment, ratifico que us encoratgem que contribuïu amb un petit escrit per tal de difondre el que esteu fent i d'aquesta manera enri-

quir i compartir metodologies i experiències en altres indrets de la geografia catalana.

Com a Junta entrant, esperem que puguem fer dels somnis realitats i que BIAIX sigui la corretja de transmissió entre tots els ensenyants de matemàtiques de Catalunya.

Voldria acabar citant una frase del Dr. Claudi Alsina que espero que sigui profitosa per tothom: "Les matemàtiques es fan amb el cap i s'ensenyen amb el cor".

Ànims i endavant per fer un BIAIX realment lluit!!!!

Joan Gómez i Urgellés (President de FEEM-CAT)

Normes per a la presentació de contribucions a la revista

1. La revista BIAIX accepta per a la seva publicació, contribucions originals relacionades amb experiències, activitats i investigacions en el camp de la matemàtica, especialment les vinculades amb la seva didàctica a tots els nivells educatius, dins l'àmbit territorial dels Països Catalans. També accepta aportacions procedents d'altres àmbits territorials dins una política d'intercanvi i debat d'experiències educatives.

2. Les contribucions rebudes seran sotmeses a una avaluació prèvia a càrrec d'especialistes i assessors independents o de membres del Consell Editorial. Del resultat de l'avaluació en resultarà l'acceptació o no de la comunicació per a la seva publicació, prèvia la possible incorporació d'algunes modificacions en la redacció final. L'acceptació de la publicació per part de BIAIX serà notificada directament a l'autor amb una indicació de la data aproximada de publicació. L'autor s'haurà de comprometre a presentar la versió final de la contribució en un termini no superior a un mes des de la notificació de l'acceptació. En cas que una comunicació no fos acceptada, l'autor rebrà també notificació del fet.

3. Per a la presentació de comunicacions originals, l'autor trametrà a la redacció de BIAIX (Revista BIAIX, ADEMGI, Apartat de Correus 835, 17080 Girona) tres còpies no retornables mecanografiades en fulls DNI-A4, a una sola cara, a doble espai i amb marges amplis (65 caràcters per línia). Els gràfics, diagrames i figures hauran de ser originals (no fotocopiats) i s'enviaran en fulls separats (un per a cada il·lustració), en tinta negra sobre paper blanc. També es podran incloure fotografies ben contrastades. Les il·lustracions es numeraran de forma correlativa i hauran d'estar necessàriament referenciades en el text de la comunicació. De la mateixa manera, les taules es numeraran correlativament i es referenciaran des del text a partir del seu número identificatiu. Darrera de cada il·lustració i de

cada taula hi figurarà el número identificatiu i s'inclourà un full a part amb una breu descripció de cada il·lustració i de cada taula. Al text original caldrà adjuntar-hi un disquet amb els arxius corresponents. Preferentment, s'utilitzarà com a tractament de textos el Microsoft Word per a Windows. Els arxius gràfics es presentaran en format, EPS o TIFF.

4. La contribució haurà d'incloure el títol, el nom de l'autor o autors, la seva afiliació i l'adreça professional completa, així com un resum del seu contingut no més llarg de 300 paraules. En full a part es faran constar les dades necessàries -nom, adreça, telèfon, e-mail...- que permetin la fàcil localització de l'autor responsable.

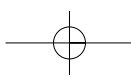
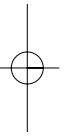
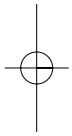
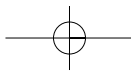
5. Al final del document s'inclourà la bibliografia refenciada en el text. Les referències s'ordenaran alfabèticament a partir del cognom del primer autor, seguint la normativa habitual.

6. Aquelles contribucions que siguin acceptades quedaran en propietat de BIAIX i podran ser impreses sense autorització expressa de l'autor. Per a la seva reproducció total o parcial, s'haurà de sol·licitar l'autorització a BIAIX. En cas de treballs presentats per diferents autors, s'entén que el primer autor o qui l'envia té la conformitat dels altres.

7. Els articles es publicaran en llengua catalana i només es traduiran al català aquelles contribucions acceptades, realitzades per autors no residents als Països Catalans.

8. Els autors es responsabilitzen del compliment de les normes establertes per a l'autorització de la reproducció de material procedent d'altres fonts bibliogràfiques.

9. L'equip de redacció de BIAIX no s'identifica necessàriament amb els criteris exposats pels autors de les contribucions publicades a la revista.



Millorem les nostres comarques

Cooperació i gestió tributària
Patrimoni
Assistència als municipis
Cooperació esportiva
Ensenyament i Cultura
Publicacions
Biblioteques
Agricultura, Ramaderia i Política forestal
Medi ambient
Obres i vies
Arxius d'imatges

Patronat de Turisme
Servei de Millora Ramadera
Consorci Costa Brava
Patronat Francesc Eximenis
Casa de Cultura de Girona
Museu d'Art de Girona
Conservatori de Música Isaac Albéniz
Consell d'Iniciatives Locals per al Medi Ambient
Campus Agroalimentari de Girona

Diputació de Girona

BUTLLETA DE SUBSCRIPCIÓ ANUAL A LA REVISTA BIAIX

Apartat de Correus 835 - 17080 Girona

Nom i cognoms / centre o entitat

Adreça **Població** **CP**

Comarca **Província** **Telèfon**

E-mail

AUTORITZACIÓ BANCÀRIA

Titular del compte

Núm. de compte

Banc o Caixa **Adreça**

Població **Província** **CP**

Senyor: Prego a aquest banc / caixa que fins a nou avís paguin, amb càrrec al meu cc/llibreta, els rebuts que presenti la Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya, referents a la quota anual de subscripció a la revista BIAIX:

☐ **1.000 Ptes. 6€ PROFESSORS** ☐ **1.500 Ptes. 9€ CENTRES O ENTITATS**

Atentament els saluda,

SIGNATURA

