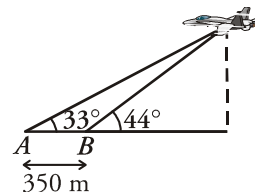




Nom:	Grup:	Data:
------	-------	-------

1.- En un moment donat un avió es troba situat respecte a dos punts A i B com mostra la figura:

Troba les distàncies de l'avió als punts A i B, així com l'altura a la qual es troba en aquell instant.



2.- Demuestra la igualtat: $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

3.- Resol la següent equació: $\sin 2x + \cos x = 0$

4.- Donats els vector $\vec{x} = (4, 1)$, $\vec{y} = (-1, 2)$ i $\vec{z} = (1, k)$, troba :

- El valor de k perquè $\vec{x}$ i $\vec{z}$ siguin perpendiculars.
- L'angle que formen $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

5.- a) Escriu les equacions paramètriques de la recta, r , que passa pels punts $P(0, -1)$ i és perpendicular a la recta:

$$r_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

b) Determina la posició relativa de la recta obtinguda en a), r_1 amb la recta:

$$r_3: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -5 - 4t \end{cases}$$

6.- Calcula la distància del punt $P(3, 2)$ a la recta

$$r: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

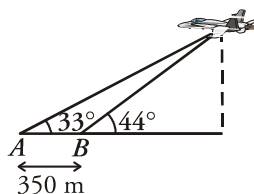
7.- Troba l'equació de la mediatriu del segment que té com extrem els punts de tall de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ amb els eixos de coordenades.



SOLUCIONS

Exercici n. 1.-

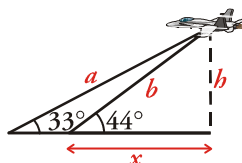
En un moment determinat un avió es troba situat respecte a dos punts tal com mostra la figura:



Troba les distàncies de l'avió als punts A i B, així com l'altura a la qual es troba en aquell instant.

X2

Solució: MÈTODE DE LES DUES TANGENTS



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 44^{\circ} &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 33^{\circ} &= \frac{h}{350 + x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x \operatorname{tg} 44^{\circ} &= h \\ (350 + x) \operatorname{tg} 33^{\circ} &= h \end{aligned}$$

$$x \operatorname{tg} 44^{\circ} = (350 + x) \operatorname{tg} 33^{\circ}$$

$$x \operatorname{tg} 44^{\circ} = 350 \operatorname{tg} 33^{\circ} + x \operatorname{tg} 33^{\circ}$$

$$x \operatorname{tg} 44^{\circ} - x \operatorname{tg} 33^{\circ} = 350 \operatorname{tg} 33^{\circ} \rightarrow x(\operatorname{tg} 44^{\circ} - \operatorname{tg} 33^{\circ}) = 350 \operatorname{tg} 33^{\circ}$$

$$x = \frac{350 \operatorname{tg} 33^{\circ}}{\operatorname{tg} 44^{\circ} - \operatorname{tg} 33^{\circ}} = 718,64 \text{ m}$$

$$h = x \operatorname{tg} 44^{\circ} = \frac{350 \operatorname{tg} 33^{\circ} \operatorname{tg} 44^{\circ}}{\operatorname{tg} 44^{\circ} - \operatorname{tg} 33^{\circ}} = 693,98 \text{ m}$$

L'avió es troba a **693,98 m** d'altura.

Per una altra banda:

TEOREMA DELS SINUS

$$\sin 44^{\circ} = \frac{h}{b} \rightarrow b = \frac{h}{\sin 44^{\circ}} = \frac{693,98}{\sin 44^{\circ}} = 999,02 \text{ m}$$

$$\sin 33^{\circ} = \frac{h}{a} \rightarrow a = \frac{h}{\sin 33^{\circ}} = \frac{693,98}{\sin 33^{\circ}} = 1274,20 \text{ m}$$

L'avió es troba a **1274,20 metres** de A i a **999,02 metres** de B.



Exercici n. 2.-

Demostra la igualtat:

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

X1

Solució:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) \cdot \sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) (\sin x \cos y - \cos x \sin y) = \\ &= (\sin x \cos y)^2 - (\cos x \sin y)^2 = \\ &= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x (1 - \sin^2 y) - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \\ &- (1 - \sin^2 x) \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y \end{aligned}$$

Exercici n. 3.-

Resol la següent equació:

$$\sin 2x + \cos x = 0$$

X1

Solució:

$$\begin{aligned} \sin 2x + \cos x &= 0 \\ 2\sin x \cos x + \cos x &= 0 \rightarrow \cos x (2\sin x + 1) = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360k \\ x = 270 + 360k \end{cases} \\ 2\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{on } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exercici n. 4.-

Donats els vector $\vec{x} = (4, 1)$, $\vec{y} = (-1, 2)$ i $\vec{z} = (1, k)$, troba :

a) El valor de k perquè $\vec{x}$ i $\vec{z}$ siguin perpendiculars.

b) L'angle que formen $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

X2

Solució:

a) Per tal que $\vec{x}$ i $\vec{z}$ siguin perpendiculars, el seu producte escalar ha de ser zero:

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = (4, 1) \cdot (1, k) = 4 + k = 0 \rightarrow k = -4$$



$$b) \cos \left(\widehat{\vec{x}, \vec{y}} \right) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{-4 + 2}{\sqrt{4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{-2}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{85}} = -0,217 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\widehat{\vec{x}, \vec{y}} \right) = 102^\circ 31' 44''$$

llavors, $77^\circ 28' 16''$

Exercici n. 5.-

a) Escriu les equacions paramètriques de la recta, r , que passa pels punts $P(0, -1)$ i és perpendicular a la recta:

$$r_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

b) Determina la posició relativa de la recta obtinguda en a), r_1 amb la recta:

$$r_3: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -5 - 4t \end{cases}$$

X2

Solució:

a) Vector posició : $\overrightarrow{OP} (0, -1)$

Vector direcció: $(2, -1)$ (perquè és perpendicular a $(1, 2)$)

Equacions paramètriques:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - t \end{cases}$$

b) Canviem el paràmetre de r_3 :

$$r_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - t \end{cases} \quad r_3: \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -5 - 4k \end{cases}$$

Iguallem:

$$\left. \begin{aligned} 2t &= 1 - 2k \\ -1 - t &= -5 - 4k \end{aligned} \right\} \quad t = 4k + 4$$

$$2(4k + 4) = 1 - 2k \rightarrow 8k + 8 = 1 - 2k \rightarrow 10k = -7$$

$$k = \frac{-7}{10} \rightarrow t = 4k + 4 = \frac{-14}{5} + 4 = \frac{6}{5}$$

Substituint $t = \frac{6}{5}$ a l'equació de r_1 (o bé $k = \frac{-7}{10}$ a la de r_3), obtenim el punt de tall de les dues

rectes: $\left(\frac{12}{5}, \frac{-11}{5} \right)$

Són secants perpendiculars



Exercici n. 6.-

Calcula la distància del punt $P(3, 2)$ a la recta

$$r: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

X1

Solució:

Passem la recta r a la forma implícita:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x = -2 + 3t) & \Rightarrow 2x = -4 + 6t \\ 3 \cdot (y = 1 - 2t) & \Rightarrow 3y = 3 - 6t \\ 2x + 3y & = -1 \rightarrow 2x + 3y + 1 = 0 \end{aligned}$$

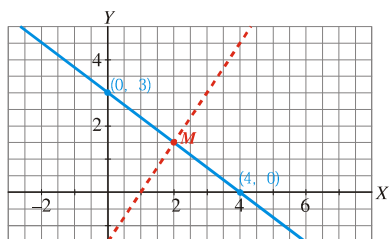
Així:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|6 + 6 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13} \approx 3,6 \text{ u}$$

Exercici n. 7.-

Troba l'equació de la mediatriu del segment que té com extrem els punts de tall de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ amb els eixos de coordenades.

Solució:



1r) Trobem els punts de tall de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ amb els eixos de coordenades:

$$\begin{aligned} x = 0 & \rightarrow 4y - 12 = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow \text{Punt } (0, 3) \\ y = 0 & \rightarrow 3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow \text{Punt } (4, 0) \end{aligned}$$

2n) La mediatriu d'un segment és perpendicular a ell i passa pel seu punt mitjà. El punt mig del segment d'extremes $(0, 3)$ i $(4, 0)$ és:

$$M\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

El pendent de la recta que uneix els punts $(0, 3)$ i $(4, 0)$ és:

$$m = \frac{-3}{4}$$



El pendent de la seva perpendicular és:

$$\frac{-1}{-3/4} = \frac{4}{3}$$

3r) L'equació de la mediatriu serà:

$$y = \frac{3}{2} + \frac{4}{3}(x-2) \rightarrow y = \frac{2}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{8}{3}$$

$$6y = 9 + 8x - 16 \rightarrow 8x - 6y - 7 = 0$$