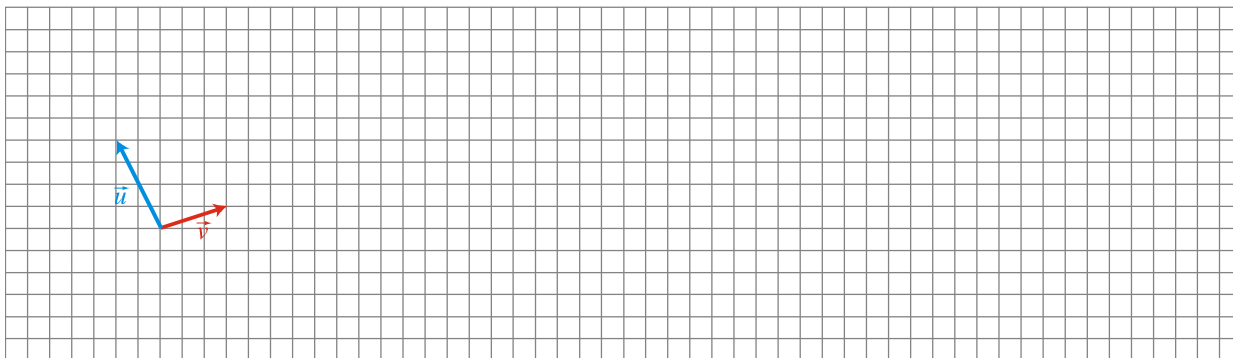


VECTORS

Exercici n. 1.-

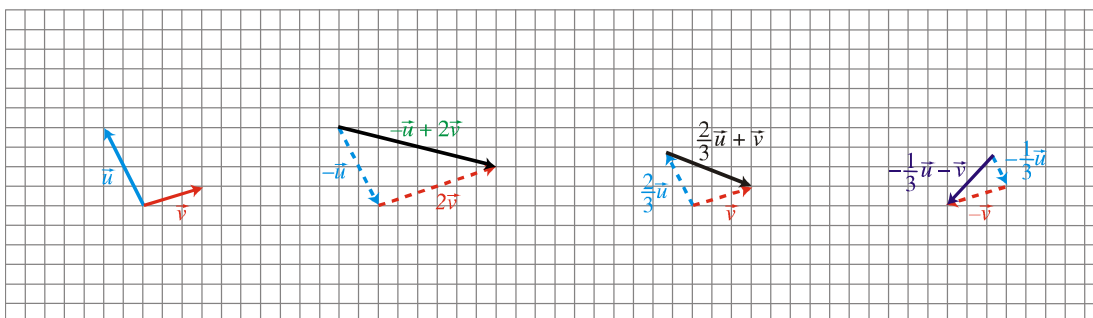
a) Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ son els vectors que mostra la figura, dibuixa $-\vec{u}+2\vec{v}$, $\frac{2}{3}\vec{u}+\vec{v}$ i $-\frac{1}{3}\vec{u}-\vec{v}$:



b) Si les coordenades de $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són $\left(\frac{2}{5}, -3\right)$ i $(-1, 3)$ obtén les coordenades dels vectors $5\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$; $-\vec{a}+2\vec{b}$; $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$.

Solució:

a)



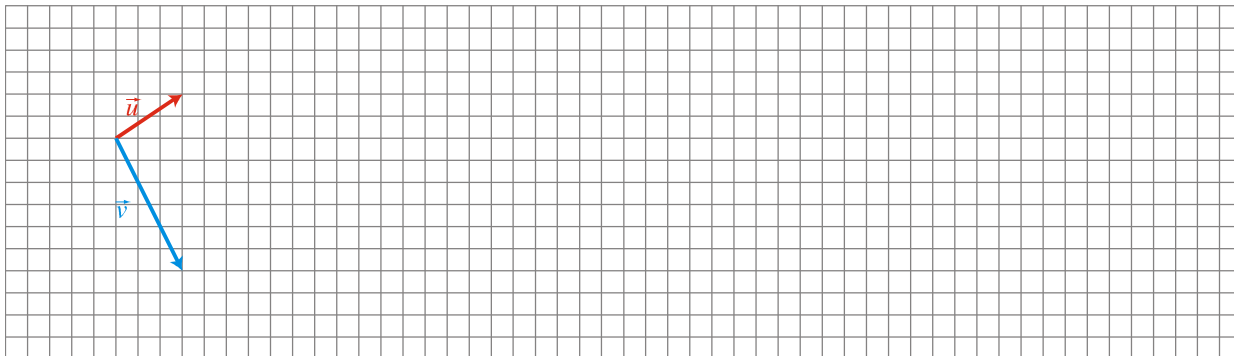
$$b) 5\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} = 5\left(\frac{2}{5}, -3\right) + \frac{1}{5}(-1, 3) = (2, -15) + \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{72}{5}\right)$$

$$-\vec{a} + 2\vec{b} = -\left(\frac{2}{5}, -3\right) + 2(-1, 3) = \left(-\frac{2}{5}, 3\right) + (-2, 6) = \left(-\frac{12}{5}, 9\right)$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}, -3\right) - (-1, 3) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{2}\right) - (-1, 3) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{9}{2}\right)$$

Exercici n. 2.-

a) Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són els següents vectors, dibuixa $2\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\vec{v}$ i $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.



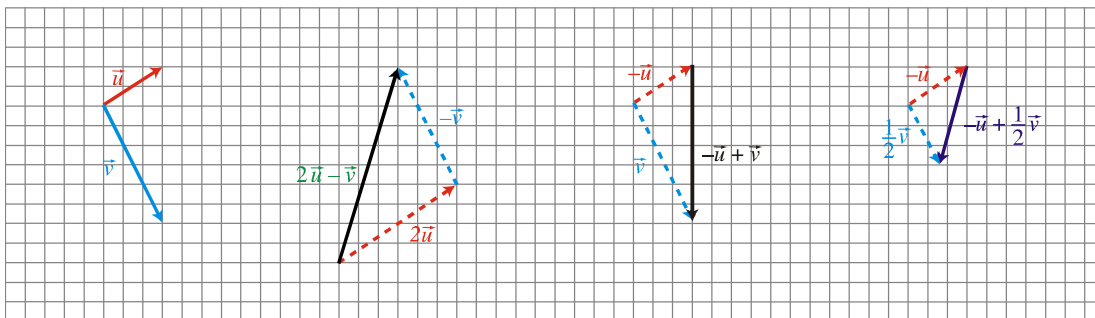
b) Les coordenades de dos vectors són $\vec{a} (2, -3)$ i $\vec{b} \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

Obtén les coordenades de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b}; \quad -\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}; \quad \frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})$$

Solució:

a)



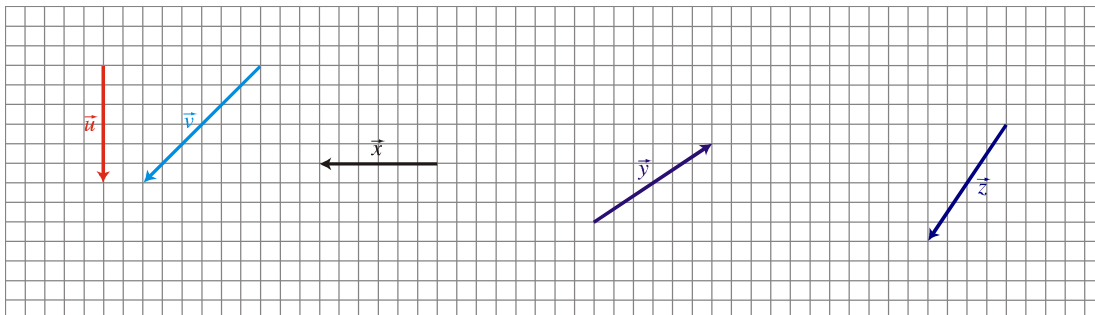
$$b) -3\vec{a}+2\vec{b} = -3(2, -3) + 2\left(-\frac{1}{2}, 2\right) = (-6, 9) + (-1, 4) = (-7, 13)$$

$$-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} = -(2, -3) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}, 2\right) = (-2, 3) + \left(-\frac{1}{4}, 1\right) = \left(-\frac{9}{4}, 4\right)$$

$$\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b}) = \frac{1}{3}\left[(2, -3) - \left(-\frac{1}{2}, 2\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}, -5\right) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}\right)$$

Exercici n. 3.-

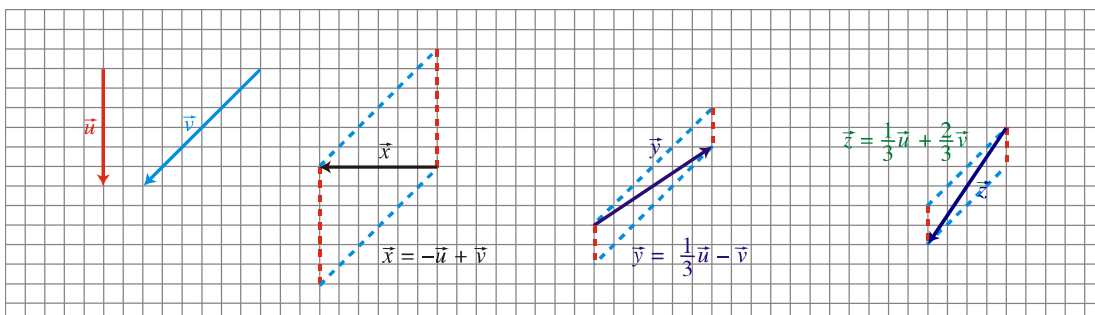
a) Escriu els vectors $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$:



b) Escriu el vector $\vec{a}(0, 17)$ com a combinació lineal de $\vec{b}\left(\frac{1}{5}, 3\right)$ i $\vec{c}(-1, 2)$.

Solució:

a)



b) Hem de trobar dos nombres, m i n , tals que:

$\vec{a} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}$, és a dir:

$$(0, 17) = m \cdot \left(\frac{1}{5}, 3\right) + n \cdot (-1, 2)$$

$$(0, 17) = \left(\frac{m}{5}, 3m\right) + (-n, 2n)$$

$$(0, 17) = \left(\frac{m}{5} - n, 3m + 2n\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{m}{5} - n \\ 17 = 3m + 2n \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 0 = m - 5n \\ 17 = 3m + 2n \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5n = m \\ 17 = 15n + 2n \end{array} \rightarrow 17 = 17n \rightarrow n = 1$$

$$m = 5n = 5$$

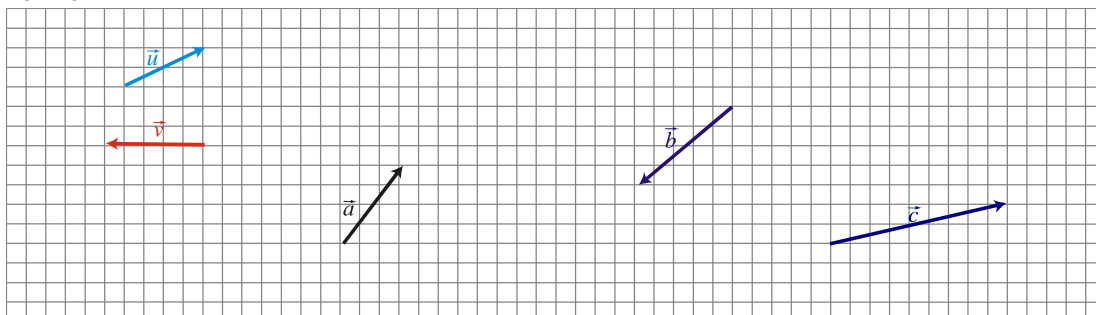
Per tant:

$$\vec{a} = 5 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}, \text{ és a dir:}$$

$$(0, 17) = 5\left(\frac{1}{5}, 3\right) + (-1, 2)$$

Exercici n. 4.-

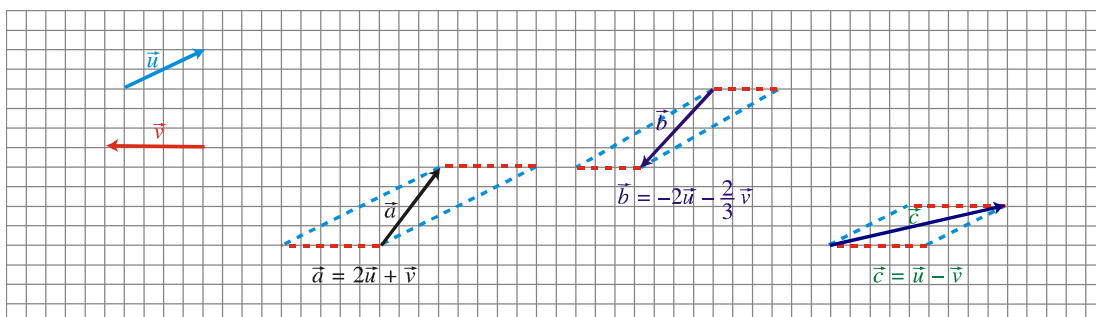
a) Expressa els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$:



b) Expressa el vector $\vec{x}(5, -2)$ com a combinació lineal de $\vec{y}(1, -2)$ i $\vec{z}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Solució:

a)



b) Hem de trobar dos nombres, m i n , tals que:

$$\vec{x} = m \cdot \vec{y} + n \cdot \vec{z}, \text{ és a dir:}$$

$$(5, -2) = m(1, -2) + n\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$(5, -2) = (m, -2m) + \left(\frac{n}{2}, 2n\right)$$

$$(5, -2) = \left(m + \frac{n}{2}, -2m + 2n\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 = m + \frac{n}{2} \\ -2 = -2m + 2n \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 10 = 2m + n \\ -2 = -2m + 2n \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} n = 10 - 2m \\ -1 = -m + n \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} n = 10 - 2m \\ n = -1 + m \end{array} \right\}$$

$$10 - 2m = -1 + m \rightarrow -2m - m = -1 - 10 \rightarrow -3m = -11 \rightarrow m = \frac{11}{3}; \quad n = -1 + m = -1 + \frac{11}{3} = \frac{8}{3}$$

Per tant:

$$\vec{x} = \frac{11}{3}\vec{y} + \frac{8}{3}\vec{z}, \text{ és a dir:}$$

$$(5, -2) = \frac{11}{3}(1, -2) + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Exercici n. 5.-

Considera els vectors $\vec{x}(a, 3)$ i $\vec{y}(-1, b)$. Troba els valors de a i b per tal que $\vec{x}$ i $\vec{y}$ siguin perpendiculars i que $|\vec{x}| = 5$.

Solució:

a) Per tal que $\vec{x}$ i $\vec{y}$ siguin perpendiculars, el seu producte escalar ha de ser zero, és a dir:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (a, 3) \cdot (-1, b) = -a + 3b = 0 \rightarrow b = \frac{a}{3}$$

b) Trobem el mòdul de $\vec{x}$ i igulem a 5:

$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9} = 5 \rightarrow a^2 + 9 = 25$$

$$a^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow a = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \rightarrow b = \frac{4}{3} \\ a = -4 \rightarrow b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Per tant, hi ha dues possibilitats:

$$a_1 = 4, b_1 = \frac{4}{3}; a_2 = -4, b_2 = -\frac{4}{3}$$

Exercici n. 6.-

Donats els vectors $\vec{u}(-1, 4)$, $\vec{v}(3, m)$ i $\vec{w}(2, -3)$:

a) Calcula m perquè $\vec{u}$ i $\vec{v}$ siguin perpendiculars.

b) Troba l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{w}$:

Solució:

a) Per tal que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ siguin perpendiculars, el seu producte escalar ha de ser zero, és a dir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 4) \cdot (3, m) = -3 + 4m = 0 \rightarrow m = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \cos \left(\angle_{\vec{u}, \vec{w}} \right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{-2 - 12}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-14}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-14}{\sqrt{221}} = -0,94$$

$$\text{Així, } \left(\angle_{\vec{u}, \vec{w}} \right) = 160^\circ 20' 46''.$$

Exercici n. 7.-

Considera els vectors $\vec{u} (2,9)$ i $\vec{v} (-3,n)$. Calcula n perquè:

a) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formin un angle de 90° .

b) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tinguin el mateix mòdul.

Solució:

a)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2,9) \cdot (-3,n) = 0$$

$$-6 + 9n = 0$$

$$9n = 6$$

$$n = \frac{6}{9}$$

$$n = \frac{2}{3}$$

b)

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$$

$$\sqrt{(-3)^2 + n^2} = \sqrt{85}$$

$$9 + n^2 = 85$$

$$n^2 = 76$$

$$n = \pm \sqrt{76}$$

