

FUNCIONS I FÓRMULES TRIGONOMÈTRIQUES

Exercici n. 1.-

a) Expressa en graus els següents angles donats en radians: $\frac{5\pi}{6}$ i 3

b) Expressa en radians els angles: 225° i 100°

Solució:

$$\text{a) } \frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$$

$$3 \text{ rad} = 3 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 171^\circ 53'14''$$

$$\text{b) } 225^\circ = 225 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

$$100^\circ = 100 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{9} \text{ rad}$$

Exercici n. 2.-

Completa la taula:

GRAUS	130°		330°	
RADIANS		$4\pi / 3$		1,5

Solució:

$$130^\circ = 130 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{13\pi}{18} \text{ rad}$$

$$\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$$

$$330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

$$1,5 \text{ rad} = 1,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 85^\circ 56'37''$$

Per tant:

GRAUS	130°	240°	330°	85°56'37''
RADIANS	$13\pi / 18$	$4\pi / 3$	$11\pi / 6$	1,5

Exercici n. 3.-

a) Passa a radians els següents angles: 210° i 70°

b) Passa a graus els angles: $\frac{7\pi}{6}$ rad i $3,5$ rad

Solució:

$$a) 210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{7\pi}{18} \text{ rad}$$

$$b) \frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$$

$$3,5 \text{ rad} = 3,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 200^\circ 32' 7''$$

Exercici n. 4.-

Completa la següent taula:

GRAUS	35°		120°	
RADIANS		$2\pi / 3$		2

Solució:

$$35^\circ = \frac{35 \cdot \pi}{180} \text{ rad} = \frac{7\pi}{36} \text{ rad}$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ \rightarrow 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

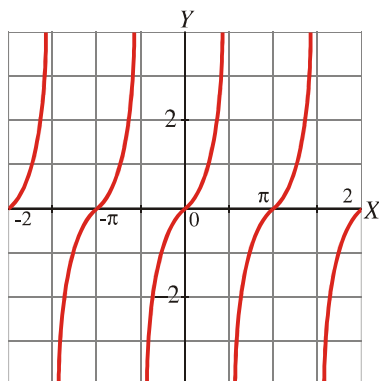
$$2 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 114^\circ 35' 30''$$

Per tant:

GRAUS	35°	120°	120°	$114^\circ 35' 30''$
RADIANS	$7\pi / 36$	$2\pi / 3$	$2\pi / 3$	2

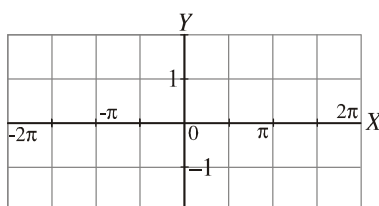
Exercici n. 5.-

a) Donada la següent gràfica, escriu l'equació de la funció corresponent:



b) Representa gràficament la següent funció en aquests eixos:

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$



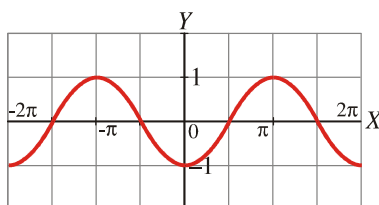
Solució:

a) La gràfica correspon a la funció $y = \tan x$.

b) Fem una taula de valors:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x - \pi/2$	$-5\pi/2$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\sin(x - \pi/2)$	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1

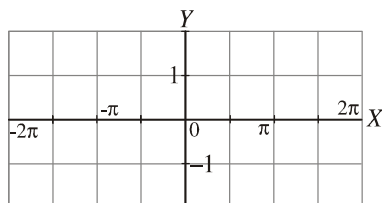
La gràfica és la següent:



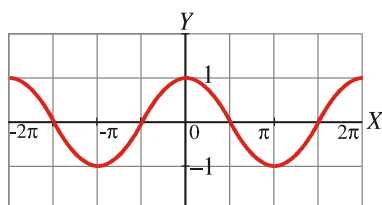
Exercici n.6.-

a) Representa en aquests eixos la següent funció trigonomètrica:

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$



b) Escriu l'equació de la funció la gràfica de la qual és la següent:

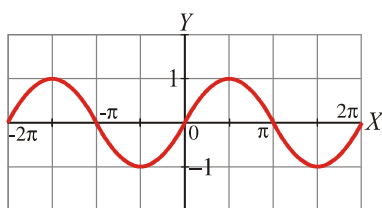


Solució:

a) Fem una taula de valors:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x - \pi/2$	$-5\pi/2$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos(x - \pi/2)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

La gràfica seria:



b) La gràfica correspon a la funció $y = \cos x$.

Exercici n. 7.-

Demostra que:

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{4 + 4 \cos x}{2 \sin x + \sin 2x}$$

Solució:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} &= \frac{\sin^2 x + (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x) \sin x} = \\ &= \frac{\sin^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x}{\sin x + \sin x \cos x} = \frac{1 + 1 + 2 \cos x}{\sin x + \frac{2 \sin x \cos x}{2}} = \\ &= \frac{2 + 2 \cos x}{\sin x + \frac{\sin 2x}{2}} = \frac{2 + 2 \cos x}{\frac{2 \sin x + \sin 2x}{2}} = \frac{4 + 4 \cos x}{2 \sin x + \sin 2x} \end{aligned}$$

Exercici n.8.-

Demostra la igualtat:

$$\frac{2 \sin x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x$$

Solució:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} &= \frac{2 \sin x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \\ &= \frac{2 \sin x \cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{2 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x \end{aligned}$$

Exercici n. 9.-

Demostra que:

$$\cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

Solució:

$$\begin{aligned} \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} &= \cos x + 2 \left(\pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \right)^2 = \\ &= \cos x + 2 \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) = \cos x + 1 - \cos x = 1 \end{aligned}$$

Exercici n. 10.-

Resol la següent equació trigonomètrica:

$$\cos 2x + \sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

Solució:

$$\cos 2x + \sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{array} \right. \text{essent } k \in \mathbb{Z}$$

Exercici n. 11.-

Resol:

$$\cos^3 x - 3\cos x = 3\cos x \sin x$$

Solució:

$$\cos^3 x - 3\cos x = 3\cos x \sin x$$

$$\cos^3 x - 3\cos x - 3\cos x \sin x = 0$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3 - 3\sin x) = 0$$

$$\cos x (1 - \sin^2 x - 3 - 3\sin x) = 0$$

$$\cos x (-\sin^2 x - 3\sin x - 2) = 0$$

$$-\cos x (\sin^2 x + 3\sin x + 2) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \rightarrow \begin{cases} -1 \\ -2 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$$\sin x = -1 \rightarrow x = 270^\circ + 360^\circ k$$

Per tant, les solucions són:

$$\begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \text{ essent } k \in \mathbb{Z}$$

Exercici n. 12.-

Resol la següent equació trigonomètrica:

$$\sin 2x + \cos 2x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$$

Solució:

$$\sin 2x + \cos 2x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$$

$$2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$$

$$2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1 - \cos x + 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 1 - \cos x = 0$$

$$2\sin x \cos x + 1 - 1 - \cos x = 0$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2\sin x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

essent $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

Exercici n. 13.-

Resol l'equació següent:

$$\cos(60^\circ + \alpha) = \sin \alpha$$

Solució:

$$\cos 60^\circ \cos \alpha - \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

$$1 = 2 \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$$

$$1 = (2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \quad \square$$

Exercici n. 14.-

Resol l'equació següent:

$$2\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 1$$

Solució:

$$\alpha = 30^\circ$$

Exercici n. 15.-

Resol l'equació següent:

$$2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{2}$$

Solució:

$$\alpha = 45^\circ$$

Exercici n. 16.-

Resol l'equació següent:

$$2\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 1$$

Solució:

$$\alpha = 30^\circ$$