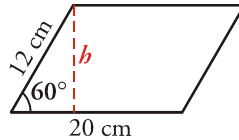


RESOLUCIÓ DE TRIANGLES

Exercici n. 1.-

Els costats d'un paral·lelogram mesuren 12 i 20 cm, respectivament, i formen un angle de 60° . Quant mesura l'altura del paral·lelogram? I la seva àrea?

Solució:



Per trobar l'altura fem:

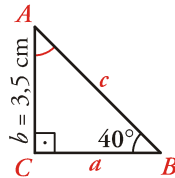
$$\sin 60^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow h = 12 \sin 60^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{L'àrea serà } A = 20 \cdot 6\sqrt{3} = 120\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Exercici n. 2.-

Volem fixar un pal de 3,5 m d'altura, amb un cable que va des de l'extrem superior del pal fins al terra. Des d'aquest punt del terra es veu el pal sota un angle de 40° . A quina distància del pal subjectarem el cable? Quina és la longitud del cable?

Solució:



Com és un triangle rectangle, els altres angles seran:

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \\ \hat{C} = 90^\circ$$

Trobem els altres costats:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{b}{a} \rightarrow \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{3,5}{a} \rightarrow a = \frac{3,5}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 4,17 \text{ m}$$

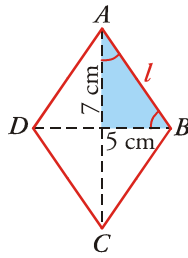
$$\sin 40^\circ = \frac{b}{c} \rightarrow \sin 40^\circ = \frac{3,5}{c} \rightarrow c = \frac{3,5}{\sin 40^\circ} = 5,45 \text{ m}$$

Per tant, subjectarem el cable de 5,45 m a 4,17 m del pal.

Exercici n. 3.-

Les diagonals d'un rombe mesuren 10 i 14 cm, respectivament. Calcula el costat del rombe i els seus angles.

Solució:



Trobem la hipotenusa aplicant el teorema de Pitàgores:

$$7^2 + 5^2 = l^2 \rightarrow l^2 = 74 \rightarrow l = 8,6 \text{ cm}$$

Trobem els angles:

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{5}{7} \rightarrow \hat{A} = 35^\circ 32' 16'' \rightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 54^\circ 27' 44''$$

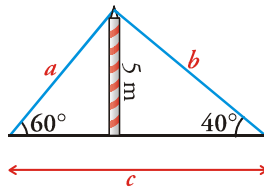
Els angles del rombe mesuren:

$$2\hat{A} = 71^\circ 4' 31''$$

$$2\hat{B} = 108^\circ 55' 29''$$

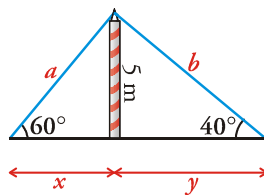
Exercici n. 4.-

Un pal de 5 metres ha estat subjectat al terra amb un cable, tal com mostra la figura:



Troba el valor de c i la longitud del cable.

Solució:



$$\sin 60^\circ = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{\sin 60^\circ} = 5,77 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 2,89 \text{ m}$$

D'altra banda, si considerem l'altre triangle:

$$\sin 40^\circ = \frac{5}{b} \rightarrow b = \frac{5}{\sin 40^\circ} = 7,78 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{5}{y} \rightarrow y = \frac{5}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 5,96 \text{ m}$$

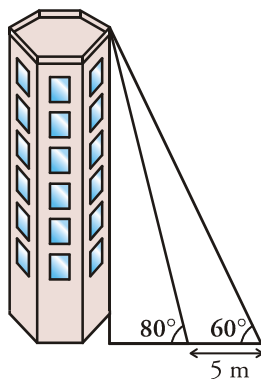
Per tant:

La longitud del cable és $a + b = 5,77 + 7,78 = 13,55$ metres.

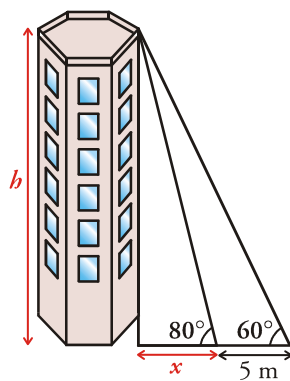
El valor de c és $x + y = 2,89 + 5,96 = 8,85$ metres.

Exercici n. 5.-

Per mesurar l'altura d'una torre ens situem en un punt del terra i veiem el punt més alt de la torre sota un angle de 60° . Ens acostem 5 metres a la torre en línia recta i l'angle és de 80° . Troba l'altura de la torre.



Solució:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 80^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{h}{x+5} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 80^\circ \\ h &= (x+5) \operatorname{tg} 60^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$x \operatorname{tg} 80^\circ = (x+5) \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$x \operatorname{tg} 80^\circ = x \operatorname{tg} 60^\circ + 5 \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$x \operatorname{tg} 80^\circ - x \operatorname{tg} 60^\circ = 5 \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$x(\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ) = 5 \operatorname{tg} 60^\circ$$

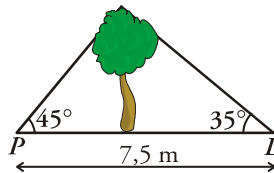
$$x = \frac{5 \operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ} = 2,20 \text{ m}$$

$$h = \frac{5 \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ} = 12,47 \text{ m}$$

La torre fa 12,47 metres d'altura.

Exercici n. 6.-

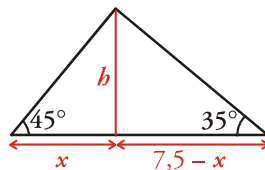
En Pau i en Lluís estan situats cadascun a un costat d'un arbre, com indica la figura:



a) Calcula l'altura de l'arbre.

b) A quina distància de l'arbre es troba en Pau?

Solució:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{7,5-x} \end{aligned} \right\} \quad 1 = \frac{h}{x} \rightarrow x = h$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{7,5-x}$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{7,5-h}$$

$$(7,5-h)\operatorname{tg} 35^{\circ}=h \rightarrow 7,5 \operatorname{tg} 35^{\circ}-h \operatorname{tg} 35^{\circ}=h$$

$$7,5 \operatorname{tg} 35^{\circ}=h+h \operatorname{tg} 35^{\circ} \rightarrow 7,5 \operatorname{tg} 35^{\circ}=h(1+\operatorname{tg} 35^{\circ})$$

$$h=\frac{7,5 \operatorname{tg} 35^{\circ}}{1+\operatorname{tg} 35^{\circ}}=3,09 \text{ m}=x$$

a) L'arbre fa 3,09 metres.

b) En Pau es troba a 3,09 m de l'arbre.

Exercici n. 7.-

Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ i α és l'angle que està en el primer quadrant, calcula (sense trobar α) :

a) $\operatorname{tg}(180^{\circ}-\alpha)$ b) $\operatorname{tg}(180^{\circ}+\alpha)$ c) $\operatorname{tg}(360^{\circ}-\alpha)$ d) $\operatorname{tg}(360^{\circ}+\alpha)$

Solució:

$$\text{a) } \operatorname{tg}(180^{\circ}-\alpha)=-\operatorname{tg} \alpha=-\frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg}(180^{\circ}+\alpha)=\operatorname{tg} \alpha=\frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}(360^{\circ}-\alpha)=-\operatorname{tg} \alpha=-\frac{1}{3}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg}(360^{\circ}+\alpha)=\operatorname{tg} \alpha=\frac{1}{3}$$

Exercici n. 8.-

Si $\sin \alpha = 0,35$ i $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ troba (sense calcular α):

a) $\sin(180^{\circ}-\alpha)$ b) $\cos(180^{\circ}+\alpha)$

Solució:

$$\text{a) } \sin(180^{\circ}-\alpha)=\sin \alpha=0,35$$

$$\text{b) } \cos(180^{\circ}+\alpha)=-\cos \alpha$$

Necessitem saber el valor de $\cos \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,35^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$0,1225 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 0,8775$$

$$\cos \alpha = 0,94 \text{ (és positiu, perquè } 0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ})$$

$$\text{Per tant : } \cos(180^{\circ}+\alpha)=-\cos \alpha=-0,94$$

Exercici n. 9.-

Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ i α és l'angle que està en el primer quadrant, calcula (sense trobar α) :

- a) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$ b) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$ c) $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$ d) $\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha)$

Solució:

a) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$

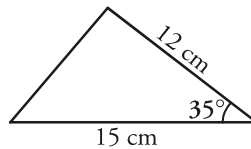
b) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

c) $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$

d) $\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

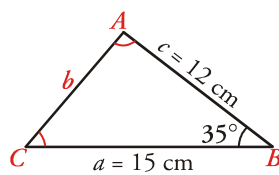
Exercici n. 10.-

Troba els costats i els angles del triangle:



Solució:

Troblem el costat b amb el teorema del cosinus:



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$b^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \cos 35^\circ$$

$$b^2 = 225 + 144 - 294,89$$

$$b^2 = 74,11 \rightarrow b = 8,61 \text{ cm}$$

Com coneixem tots els costats, la **Solució**: és única.

Troblem l'angle $\hat{C}$:

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{12}{\sin \hat{C}} = \frac{8,61}{\sin 35^\circ} \rightarrow \sin \hat{C} = \frac{12 \sin 35^\circ}{8,61}$$

$$\sin \hat{C} = 0,799 \rightarrow \hat{C} = 53^\circ 4' 26''$$

Finalment, trobem l'angle $\hat{A}$:

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 91^\circ 55' 34''$$

Per tant:

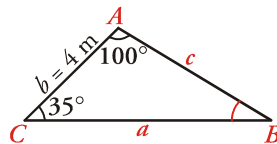
$$a = 15 \text{ cm}; \hat{A} = 91^\circ 55' 34''$$

$$b = 8,61 \text{ cm}; \hat{B} = 35^\circ$$

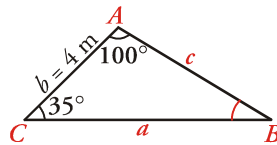
$$c = 12 \text{ cm}; \hat{C} = 53^\circ 4' 26''$$

Exercici n. 11.-

Troba els costats i els angles d'aquest triangle:



Solució:



Com $\hat{A} + \hat{C} = 100^\circ + 35^\circ = 135^\circ < 180^\circ$, hi ha una única solució.

Troblem l'angle $\hat{B}$:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

Amb el teorema dels sinus trobem els costats a i c :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{a}{\sin 100^\circ} = \frac{4}{\sin 45^\circ} \rightarrow a = \frac{4 \sin 100^\circ}{\sin 45^\circ} = 5,57 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 35^\circ} \rightarrow c = \frac{4 \sin 35^\circ}{\sin 45^\circ} \rightarrow 3,24 \text{ m}$$

Per tant:

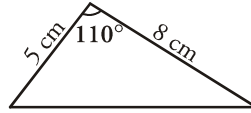
$$a = 5,57 \text{ m}; \hat{A} = 100^\circ$$

$$b = 4 \text{ m}; \hat{B} = 45^\circ$$

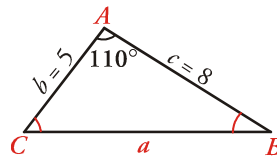
$$c = 3,24 \text{ m}; \hat{C} = 35^\circ$$

Exercici n. 12.-

Calcula els costats i els angles del següent triangle:



Solució:



Troblem el costat a amb el teorema del cosinus:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\a^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 110^\circ \\a^2 &= 25 + 64 + 27,36 \\a^2 &= 116,36 \\a &= 10,79 \text{ cm}\end{aligned}$$

Com coneixem els tres costats, la **Solució**: és única.

Calculem l'angle $\hat{B}$, aplicant el teorema dels sinus:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{10,79}{\sin 110^\circ} = \frac{5}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{5 \sin 110^\circ}{10,79}$$

$$\sin \hat{B} = 0,435 \rightarrow \hat{B} = 25^\circ 48' 49''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 44^\circ 11' 11''$$

Per tant:

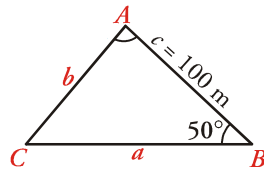
$$\begin{aligned}a &= 10,79 \text{ cm}; \hat{A} = 110^\circ \\b &= 5 \text{ cm}; \hat{B} = 25^\circ 48' 49'' \\c &= 8 \text{ cm}; \hat{C} = 44^\circ 11' 11''\end{aligned}$$

Exercici n. 13.-

Es volen unir tres punts, A, B i C, a través de camins rectes que uneixin A amb B, B amb C i C amb A. La distància de A a B és de 100 metres, l'angle corresponent a B és de 50° , i l'angle en A és de 75° . Quina és la distància entre B i C? I entre A i C?

Solució:

Troblem l'angle $\hat{C}$:



$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 55^\circ$$

Calculem a i b aplicant el teorema dels sinus:

$$\frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{100}{\sin 55^\circ} \rightarrow a = \frac{100 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 55^\circ} = 117,92 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\sin 50^\circ} = \frac{100}{\sin 55^\circ} \rightarrow b = \frac{100 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 55^\circ} = 93,52 \text{ m}$$

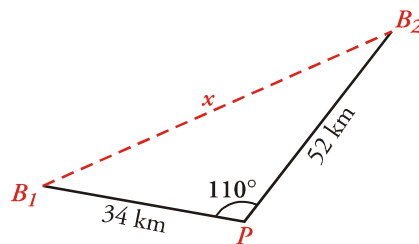
Per tant, la distància entre B i C és de 117,92 i la distància entre A i C és de 93,52 m.

Exercici n. 14.-

Dos vaixells surten d'un port a la mateixa hora amb rumbs distints, formant un angle de 110° . Al cap de 2 hores, el primer vaixell es troba a 34 km del punt inicial i el segon vaixell, a 52 km d'aquell punt. En aquest mateix instant, a quina distància es troba un vaixell de l'altre?

Solució:

Troblem la distància, x , aplicant el teorema del cosinus:



$$x^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot \cos 110^\circ$$

$$x^2 = 1156 + 2704 + 1209,38$$

$$x^2 = 5069,38$$

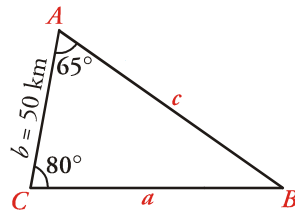
$$x = 71,20 \text{ km}$$

Per tant, la distància entre els dos vaixells és de 71,20 km.

Exercici n. 15.-

En dues estacions de ràdio, *A* i *C*, que estan situades a 50 km una de l'altra, es reben senyals que envia un vaixell, *B*. Si considerem el triangle de vèrtexs *A*, *B* i *C*, l'angle en *A* és de 65° i l'angle en *C* és de 80° . A quina distància es troba el vaixell de cada una de les dues estacions de ràdio?

Solució:



Troblem l'angle $\hat{B}$:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 35^\circ$$

Troblem els valors *a* i *c* aplicant el teorema dels sinus:

$$\frac{a}{\sin 65^\circ} = \frac{50}{\sin 35^\circ} \rightarrow a = \frac{50 \sin 65^\circ}{\sin 35^\circ} = 79 \text{ km}$$

$$\frac{c}{\sin 80^\circ} = \frac{50}{\sin 35^\circ} \rightarrow c = \frac{50 \sin 80^\circ}{\sin 35^\circ} = 85,85 \text{ km}$$

Per tant, el vaixell és a 79 km de l'estació *C* i a 85,85 km de l'estació *A*.