

Exercicis de Combinatòria.-

Tenim 10 aliments i els volem combinar de 2 en 2 per trobar la millor combinació. Quantes combinacions obtindrem?

Solució:

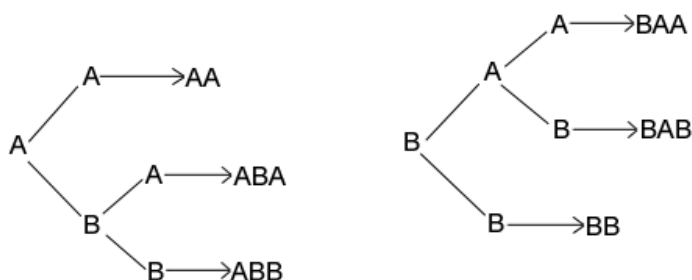
Tenim 10 elements i els agrupem de 2 en 2. No es poden repetir però no importa l'ordre.

$$C_{10,2} = \frac{V_{10,2}}{P_2} = \frac{10 \cdot 9}{45} = 45 \text{ combinacions.}$$

Dues amigues s'enfronten en un torneig de tennis; la guanyadora serà la primera que aconsegueixi guanyar dos sets. De quantes formes possibles es pot desenvolupar el partit?

Solució:

Anotem en un diagrama la guanyadora de cada set.



Si el primer set el guanya A, hi ha possibles desenvolupaments del torneig. Són 6 les formes possibles de desenvolupament del torneig.

Quants nombres de 3 xifres es poden formar amb les xifres parelles'

Solució:

Tenim 5 xifres parelles: 0, 2, 4, 6, 8. Volem fer nombres de tres cifres ($m \neq n$). Es poden repetir les cifres (p.e.: 222 és un nombre)

$$VR_{m,n} = 5^3 = 125$$

Hi ha 125 nombres possibles.

De quantes maneres poden quedar classificats els 12 participants d'un campionat de tir amb arc?

Solució:

Es formaran agrupacions de 12 participants ordenats segons la seva puntuació.

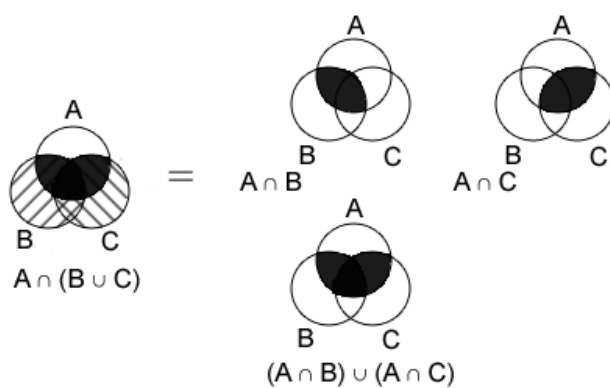
$$P_m = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479.001.600$$

Hi ha 479.001.600 possibilitats.

Exercicis de operacions amb conjunts.-

Justifica gràficament: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Solució:



Justifica gràficament la igualtat següent: $A \cup (B \cap A) = A$

Solució:



Exercicis de probabilitat clàssica.-

En una baralla de 40 cartes, troba:

- a) P[sota]
- b) P[espasa]

Solució:

$$\begin{aligned} \text{a) } P[\text{sota}] &= \frac{\text{nombre de sotes}}{\text{nombre total de cartes}} = \frac{4}{40} = 0'1 \\ \text{b) } P[\text{espasa}] &= \frac{\text{nombre d'espases}}{\text{nombre total de cartes}} = \frac{10}{40} = 0'25 \end{aligned}$$

Tenim una bossa amb cinc boles diferents, marcades com {A, B, C, D, E}

- Quin és l'espai mostral?
- Escriu un succés elemental i tres de no elementals.
- Quants successos té aquesta experiència?

Solució:

- $E = \{A, B, C, D, E\}$
- succés elemental = B
succés no elemental $\rightarrow$ succés segur {E}
succés impossible $\{\emptyset\}$

$$\text{c) } 2^5 = 32$$

Dels successos A i B se sap que:

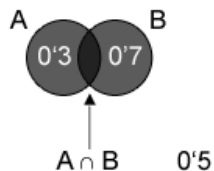
$$P[A] = 0'3$$

$$P[B] = 0'7$$

$$P[A' \cap B'] = 0'5$$

Troba $P[A \cup B]$ i $P[A \cap B]$

Solució:



$$P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$$

com que $P[A' \cap B'] = 0'5$, obtenim:

$$P[A \cup B] = 1 - 0'5 = 0'5$$

Per calcular $P[A \cap B]$ apliquem la igualtat:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$0'5 = 0'3 + 0'7 - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = 0'5$$

En una baralla de 40 cartes, troba:

- $P[\text{cavall}]$
- $P[\text{copa}]$

Solució:

$$\begin{aligned} \text{a) } P[\text{cavall}] &= \frac{\text{nombre de cavalls}}{\text{nombre total de cartes}} = \frac{4}{40} = 0'1 \\ \text{b) } P[\text{copa}] &= \frac{\text{nombre de copes}}{\text{nombre total de cartes}} = \frac{10}{40} = 0'25 \end{aligned}$$

Quina és la probabilitat d'obtenir 20 en multiplicar els resultats de dos daus correctes?

Solució:

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$P[\text{multiplicació 20}] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0'056$$

Exercicis de probabilitat condicionada.-

Es consideren dos successos A i B, associats a un experiment aleatori amb $P[A] = 0'2$, $P[B] = 0'6$ i $P[A' \cup B'] = 0'43$.

a) Són independents A i B?

b) Si $M \subset A$, quin és el valor de $P[M'/A']$?

Solució:

a) Per veure si són independents, comprovarem si es compleix la igualtat següent:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

$$P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B]$$

$$\text{Per tant, } P[A \cap B] = 1 - P[A' \cup B'] = 1 - 0'43 = 0'57$$

$$P[A] \cdot P[B] = 0'2 \cdot 0'6 = 0'12$$

A i B no són independents, perquè $P[A \cap B] \neq P[A] \cdot P[B]$

b) $M \subset A \Rightarrow A' \subset M'$. Per tant:

$$P[M'/A'] = \frac{P[M' \cap A']}{P[A']} = \frac{P[A']}{P[A']} = 1$$

En un centre de salut es fa un estudi entre els malalts de càncer de pulmó i si són o no fumadors. Aquesta és la taula que en resulta:

	MALALTS AMB CÀNCER DE PULMÓ	NO MALALTS DE CÀNCER DE PULMÓ	
FUMADORS		20	100
NO FUMADORS	30	70	

- Completa la taula.
- Calcula la probabilitat que un malalt de càncer de pulmó sigui fumador.
- Calcula la probabilitat que un no fumador estigui malalt de cancer de pulmó.

Solució:

a)

	MALALTS AMB CÀNCER DE PULMÓ	NO MALALTS DE CÀNCER DE PULMÓ	
FUMADORS	80	20	100
NO FUMADORS	30	70	100
	110	90	

$$b) P[\text{malalt/fumador}] = \frac{80}{100} = 0'8$$

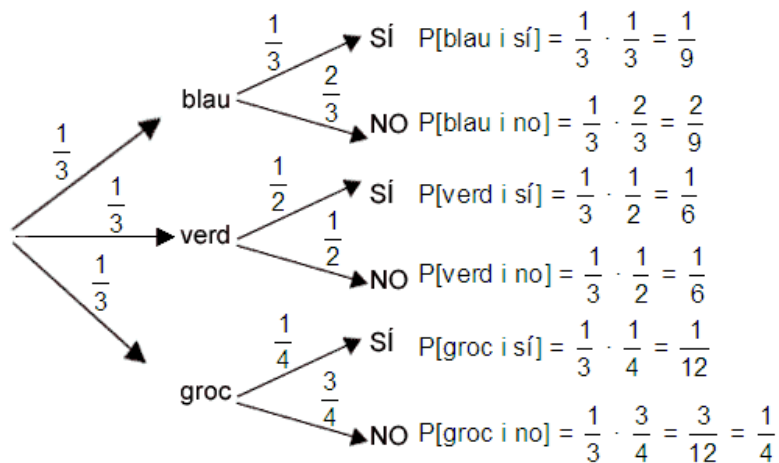
$$c) P[\text{no fumador/malalt}] = \frac{30}{110} = 0'27$$

Tenim una caixa marcada com a "A", i per una altra banda tenim 3 conjunts de claus de diferents colors: blau, verd i groc. Cada conjunt de colors té diferents números de claus. El conjunt blau té tres claus, el conjunt verd te 2 claus i el conjunt groc té 4 claus. Només una clau de cada conjunt obre la caixa "A".

- Descriu el procés mitjançant un diagrama d'arbre.
- Calcula la probabilitat que s'encerti amb la clau.
- Quina serà la probabilitat que el conjunt triat sigui el groc i la clau obri?

Solució:

a)



b)

$$P[\text{sí}] = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{13}{36}$$

c)

$$P[\text{groc i sí}] = \frac{1}{12}$$

Calcula la probabilidad d'obtenir algun 2 en llançar sis daus.

Solució:

$$P[6 \text{ vegades } \{\text{algun } 2\}] = P[2] \cdot P[2] \cdot P[2] \cdot P[2] \cdot P[2] \cdot P[2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{46656}$$

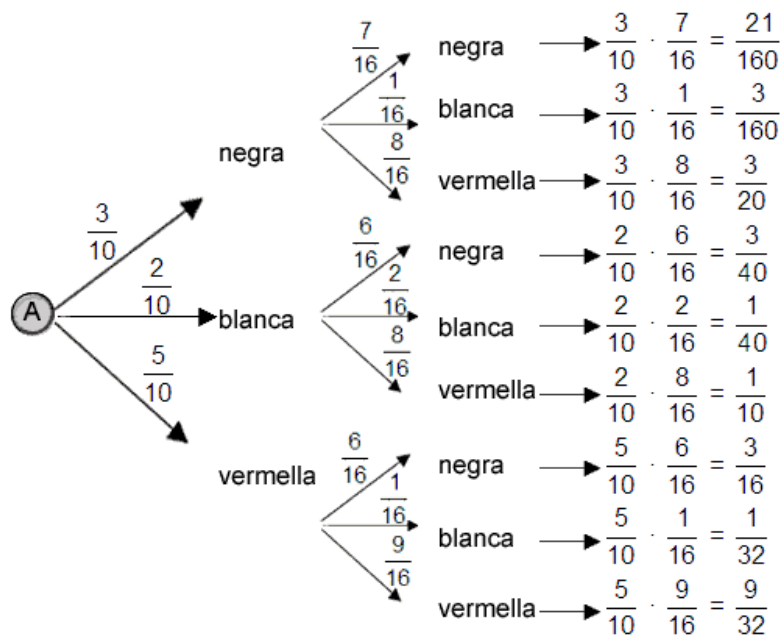
Tenim una urna A amb 3 boles negres, 2 boles blanques i 5 boles vermelles. I una urna B amb 6 boles negres, 1 bola blanca i 8 boles vermelles.

Traiem una bola de A i la llencem a B i, a continuació, traïem una bola de B.

a) Calcula la probabilitat que la bola treta de B sigui negra.

b) Sabent que la bola treta de B ha estat blanca, calcula la probabilitat que la bola treta de A fos blanca.

Solució:



a)

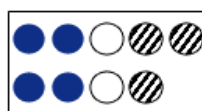
$$P[\text{negra}] = \frac{21}{160} + \frac{3}{40} + \frac{3}{16} = \frac{63}{160}$$

b)

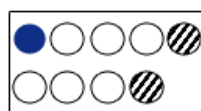
$$P[\text{blanca}] = \frac{3}{160} + \frac{1}{40} + \frac{1}{32} = \frac{3}{40}$$

$$P[\text{blanca 1/blanca 2}] = \frac{1/140}{3/40} = \frac{1}{3}$$

Llencem una moneda. Si surt cara, extraiem una bola de la caixa A. Si surt creu, extraiem una bola de la caixa B.



CAIXA A



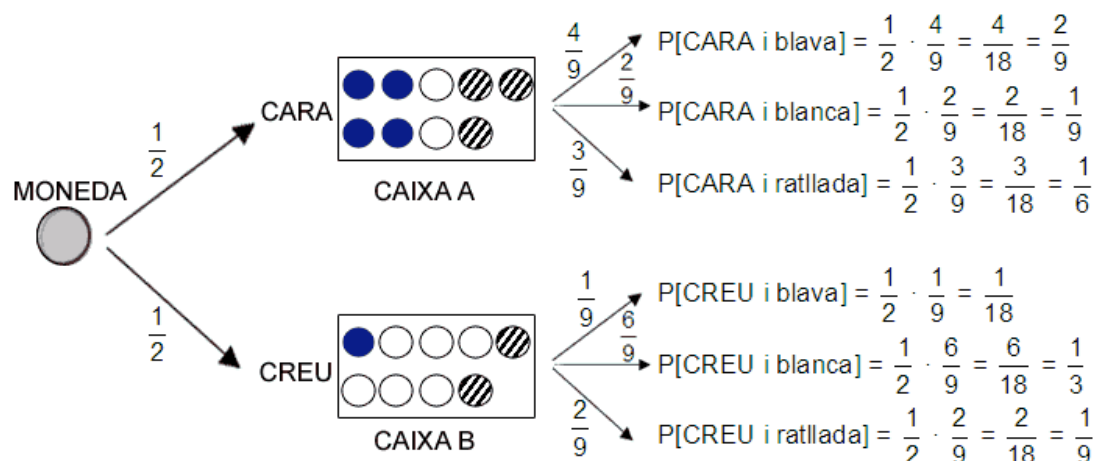
CAIXA B

- bola blava
- bola blanca
- bola ratllada

a) Calcula la probabilitat que la bola sigui ratllada.

b) Calcula la probabilitat que la bola sigui blanca.

Solució:



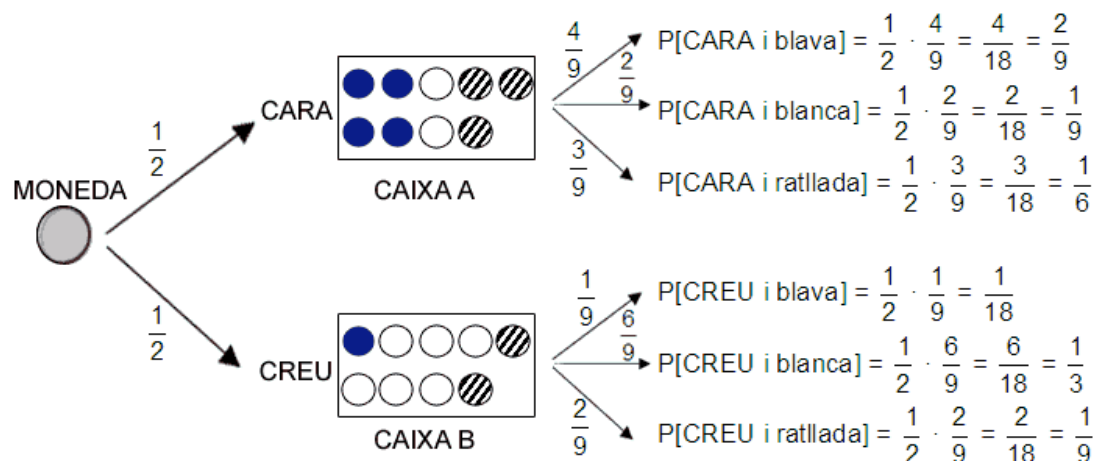
a)

$$P[\text{bola ratllada}] = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

b)

$$P[\text{bola blanca}] = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

A partir del següent diagrama d'arbre:



a) Quina és la probabilitat que la bola blava s'hagi tret de la caixa B ($P[B/\text{blava}]$)?

b) $P[A/\text{blanca}]$

c) $P[B/\text{ratllada}]$

Solució:

$$P[\text{bola blava}] = \frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

$$P[\text{bola blanca}] = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P[\text{bola ratllada}] = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

a)

$$P[B/\text{blava}] = \frac{1/18}{5/18} = \frac{1}{5}$$

b)

$$P[A/\text{blanca}] = \frac{1/9}{4/9} = \frac{1}{4}$$

c)

$$P[B/\text{ratllada}] = \frac{1/9}{5/18} = \frac{2}{5}$$

En una urna A tenim 3 boles negres, 2 boles blanques i 5 boles vermelles. En una urna B tenim 6 boles negres, 1 bola blanca i 8 boles vermelles.

Si triem a l'atzar una urna i traiem una bola, calcula:

a) $P[\text{vermella}/B]$

b) $P[\text{negra}/A]$

c) $P[B \text{ i blanca}]$

d) Sabent que la bola obtinguda és negra, quina és la probabilitat d'haver triat l'urna B?

Solució:

a)

$$P[\text{vermella}/B] = \frac{8}{13}$$

b)

$$P[\text{negra}/A] = \frac{3}{10}$$

c)

$$P[B \text{ i blanca}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$$

d)

$$P[B/\text{negra}] = \frac{6/25}{9/25} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$